

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE CHIMIE
CATEDRA DE FIZICĂ

CONSTANTIN CIOACĂ ● MAGDA FIFIRIG

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTRICITATE

PENTRU UZUL STUDENŢILOR
DE LA SECŢIA DE CHIMIE-FIZICĂ

CENTRUL DE MULTIPLICARE
AL UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI
1991

UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
FACULTATEA DE CHIMIE
CATEDRA DE FIZICĂ

CONSTANTIN CIOACĂ MAGDA FIFIRIG

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTRICITATE

PENTRU UZUL STUDENŢILOR
DE LA SECŢIA DE CHIMIE FIZICĂ

CENTRUL DE MULTIPLICARE
AL UNIVESRITĂŢII DIN BUCUREŞTI
1991

C U P R I N S

1. PROBLEME DE ELECTROSTATICA

1.1. Atomul de hidrogen este alcătuit dintr-un proton şi un electron cu sarcini egale şi de semn contrar, avînd valoarea absolută $e = 1,6\cdot10^{-19}$ C. In stare fundamentală, raza orbitei electronului în jurul protonului fiind $r_0 = 0,53\cdot10^{-10}$m, să se calculeze forţa de atracţie exercitată între electron şi proton.

R.:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r_0^2} = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{1,6\cdot10^{-19}}{0,53\cdot10^{-10}}\right)^2 =$$

$$= 8,2\cdot10^{-8}N\ ;\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2/c^2$$

1.2. Un proton are sarcina $e = 1,6\cdot10^{-19}$C şi masa $m = 1,67\cdot10^{-27}$kg. Să se compare forţa de respingere coulombiană între doi protoni consideraţi punctuali, cu forţa de atracţie newtoniană între aceştia. Constanta atracţiei universale are valoarea $\gamma = 6,67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$.

R.: $F_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{e^2}{d^2}$, $F_a = \gamma\cdot\frac{m^2}{d^2}$, $\frac{F_r}{F_a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\cdot\gamma}\ \frac{e^2}{m^2}$

$$\frac{F_r}{F_a} = \frac{9\cdot10^9\cdot10^{11}}{6,67}\cdot\frac{(1,6\cdot10^{-19})^2}{(1,67\cdot10^{-27})^2} \cong 1,248\cdot10^{36};$$

$$F_r \cong 10^{36}\cdot F_a$$

1.3. Calculaţi sarcina totală Q a electronilor existenţi într-o bilă de Fe neîncărcată electric, avînd masa m = 1 g. Care ar fi forţa de atracţie dintre 2 astfel de bile situate la distanţa d = 1 m, dacă am transfera 1‰ din electronii uneia din bile pe cealaltă?

Masa atomică a fierului este A = 55,85 kg/kmol.

Numărul atomic: Z = 26.

Numărul Avogadro: $N_A = 6,025\cdot10^{26}$ atomi/kmol.

R.: Cîţi atomi conţine masa m de Fe?

Dacă: 1 kmol $\longrightarrow$ N_A atomi cîţi kmoli sînt conţinuţi în masa m?

$$\begin{array}{l} 1 \text{ kmol } \ldots\ldots \text{ A kg} \\ x \text{ kmol } \ldots\ldots \text{ m}\cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{m\cdot 10^{-3}}{A} \text{ kmol}$$

Deci, bila de masă m conţine următorul număr de atomi: N

$$N = \frac{m\cdot 10^{-3}}{A} N_A \text{ atomi}$$

Sarcina totală a bilei, dacă fiecare atom conţine Z electroni, va fi:

$$Q = Z\cdot e\cdot N = \frac{26\cdot 10^{-3}}{55,85} \cdot 6 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} =$$

$$= 4,5 \cdot 10^4 = 45 \cdot 10^3 \text{ C}$$

Cealaltă bilă va avea o sarcină egală cu sarcina transferată de pe prima bilă: $Q' = \frac{1}{1000} \cdot Q = -10^{-3} Q$ C, care este de semn "-".

$$F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{10^{-3}Q\cdot Q\, 10^{-3}}{d^2} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\cdot 2025\cdot 10^6 =$$

$$= 18225\cdot 10^9 \text{ N} = 18,2\cdot 10^{12} \text{ N}$$

($Q'' = +10^{-3}$ Q); Q" este sarcina rămasă pe prima bilă.

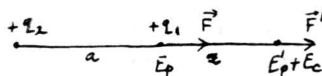
1.4. Ce valoare au sarcinile electrice, egale, cu care ar trebui încărcate 2 bile identice avînd masa de 1 kg, situate în aer la distanţa de 1 mm una de alta, pentru ca forţa coulombiană exercitată asupra fiecărei bile să fie egală ca valoare cu greutatea ei într-un loc în care accelerația gravitației este $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

R.: $F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2}$, $G = mg$; $F = G$;

$$q = d\sqrt{4\pi \varepsilon_0 mg} = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ C.}$$

1.5. Sarcina electrică punctiformă $+q_1$ şi de masă m, aflată la distanţa „a" de sarcina punctiformă cu poziţie fixă $+q_2$, se pune în mişcare la un moment dat (t=0) cu viteză iniţială nulă, sub influenţa forţei de interacţiune coulombiană. Să se determine viteza limită a sarcinii $+q_1$. Sarcinile se

află în aer şi se neglijează frecările.



R.: Aplicăm principiul conservării energiei totale:

$$E_p = E_c + E_p'$$

$$\frac{q_1 q_2}{2\pi \varepsilon_0 a} = \frac{mv^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 (a+x)} \Rightarrow v^2 = \frac{q_1 q_2}{2\pi \varepsilon_0 m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\right) .$$

Viteza la un momen dat are expresia:

$$v = \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{a}{a} - \frac{1}{a+x}} \qquad \text{cu} \qquad \alpha = \frac{q_1 q_2}{2\pi \varepsilon_0 m}$$

Se observă că:

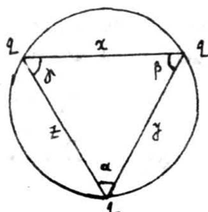
$$v = \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{x}{a(a+x)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}}}$$

v va fi __maxim__ dacă numitorul $1 + \frac{1}{x}$ va fi __minim__, adică cînd $x \rightarrow \infty$.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\alpha}{a}} = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi \varepsilon_0 ma}}$$

__1.6__. Să se arate că 3 sarcini electrice punctiforme identice care au posibilitatea de a se mişca liber pe un cerc, se vor aşeza la echilibru, în vîrfurile unui triunghi echilateral.

Sistemul celor 3 sarcini este izolat şi se află în aer. Se va utiliza faptul că funcţia $f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z$ este minimă dacă $x = y = z$.



R.: Aplicăm principiul "__energiei potenţiale minime__".

Sistemul celor 3 sarcini posedă energie potenţială de interacţie electrostatică, astfel că la echilibrul sarcinilor pe cerc, aceasta trebuie să aibă __valoarea minimă__.

__Energia de interacţie electrostatică__ a două sarcini: Q, q aşezate la distanţa r este:

$$E_{el} = \frac{Q \cdot q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Energia de interacţie electrostatică este o mărime aditivă:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{q \cdot q}{4\pi \varepsilon_0 x} + \frac{q \cdot q}{4\pi \varepsilon_0 y} + \frac{q \cdot q}{4\pi \varepsilon_0 z}$$

$$E = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$; E_{min} corespunde situaţiei în care

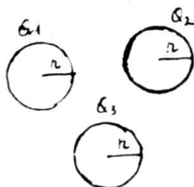
$x = y = z = a$.

Deci, $E_{min} = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{3}{a}$,

a = latura triunghiului echilateral.

1.7. Trei sfere conductoare identice, avînd sarcinile electrice respectiv $Q_1 = 10^{-4}$ C, $Q_2 = -2 \cdot 10^{-4}$ C, $Q_3 = 3 \cdot 10^{-4}$ C se aduc în contact. Ce sarcină electrică va avea fiecare sferă în urma contactului?

R.: Potenţialul unei sfere este



$$V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r} \quad \text{deci,} \quad V_1 = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon r},$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi \varepsilon r}, \qquad V_3 = \frac{Q_3}{4\pi \varepsilon r}$$

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{Q_3}{V_3}$$ (r = raza sferei, Q = sarcina sa)

După unire:

Sferele vor avea acelaşi potenţial: V' şi sarcinile Q'_1, Q'_2, Q'_3

$$V' = \frac{Q'_1}{4\pi \varepsilon r} = \frac{Q'_2}{4\pi \varepsilon r} = \frac{Q'_3}{4\pi \varepsilon r} \Rightarrow Q'_1 = Q'_2 = Q'_3$$

Legea conservării sarcinii: sarcina totală înainte de unirea sferelor este egală cu sarcina totală după unire:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = 3Q'_1 = 3Q'_2 = 3Q'_3 \Rightarrow$$

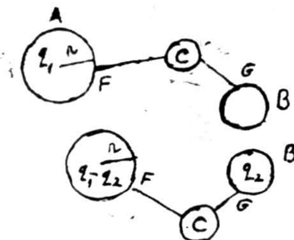
$$Q'_1 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}; \qquad Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}; \qquad Q'_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}$$

1.8. Un corp A este încărcat cu sarcină pozitivă $q_1 = +3$ μ[C] El este pus în contact prin firul conductor FG cu un corp neîncărcat B. Pe firul FG s-a montat un aparat C care măsoară can-

titatea de electricitate trecută prin fir. După punerea corpurilor în contact, aparatul indică sarcina $q_2 = 1\ \mu C$.

a) Cum apare sarcina q_2?

b) Ce sarcini au corpul A și B după aducerea lor în contact?



R.: a) După aducerea în contact se electrisează, prin contact și corpul B.

Un număr de electroni de pe corpul B vor trece pe corpul A, care încărcat fiind pozitiv $q_1 = +3\ \mu C$ are un deficit de electroni. Va trece cantitatea de electricitate egală cu q_2, acest proces încetînd în momentul în care cele 2 corpuri capătă același potențial.

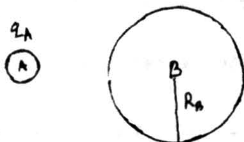
b) Fie q_A și q_B sarcinile corpurilor A respectiv B după contactul celor 2 corpuri. Conform conservării sarcinii electrice putem scrie: $q_A + q_B = q_1 = 3\ \mu C$.

In conformitate cu punctul a) q_B reprezintă tocmai sarcina q_2. Corpul B pierzînd electroni, rămîne încărcat cu o sarcină pozitivă $q_B = q_2 = +1\ \mu C$.

Rezultă: $q_A = q_1 - q_B = 3 - 1 = 2\ \mu C$

1.9. Să se arate că dacă un corp încărcat A este pus în contact cu pămîntul, corpul încărcat A își pierde sarcina electrică.

R.: Să considerăm pentru simplitate, că cele 2 corpuri au formă sferică: sfera A și sfera B. Sfera B presupunem că nu este încărcată electric $q_B = 0$, iar sfera A presupunem că are sarcina q_A. Presupunem, de asemenea, că $R_B \gg R_A$. După efectuarea contactului:



$V_A' = V_B' = V$ și conform conservării sarcinii electrice $q_A' + q_B' = q_A$ q_A', q_B' = sarcinile sferelor după contact.

Utilizez formula: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$ $\Longrightarrow$

$q'_A = V'_A \cdot 4\pi \varepsilon R_A$; $q'_B = V'_B \cdot 4\pi \varepsilon R_B$; $V'_A = V'_B$

$\frac{q'_A}{q'_B} = \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow q'_B = q'_A \cdot \frac{R_B}{R_A}$. Dar: $q'_A = q_A - q'_B$. Deci,

$$q'_B = (q_A - q'_B)\frac{R_B}{R_A} \Rightarrow q'_B\left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) = q_A \frac{R_B}{R_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q'_B = q_A \cdot \frac{R_B}{R_A} \cdot \frac{R_A}{R_A + R_B} = q_A \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_B}} .$$

Deoarece: $R_B \gg R_A \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} \to 0$

$$\boxed{q'_B = q_A}$$

Inlocuiesc în formula: $q'_A + q'_B = q_A \Rightarrow q'_A + q_A = q_A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{q'_A = 0}$$

Deci, după contact sarcina de pe sfera A (de rază mai mică) $q'_A = 0$, ceea ce înseamnă că sarcina q_A a trecut în totalitate pe sfera B (avînd raza mult mai mare ca sfera A).

1.10. Două corpuri identice au sarcinile Q_1 şi Q_2 de acelaşi semn şi se află la distanţa d. Ele se ating şi apoi se resping la aceeaşi distanţă. Care forţă de interacţie este mai mare?

R.: Inainte de atingere, forţa de respingere este

$F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2}$. După atingere, fiecare corp se încarcă cu sarcinile: $Q'_1 = Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$. Noua forţă de respingere este:

$F' = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{4 d^2}$. Vom arăta că $F' > F$. Intr-adevăr,

$\frac{(Q_1+Q_2)^2}{4} = \frac{Q_1^2 + 2 Q_1 Q_2 + Q_2^2}{4} > Q_1 Q_2$, deoarece:

$$Q_1^2 + 2 Q_1 Q_2 + Q_2^2 > 4 Q_1 Q_2 \Rightarrow Q_1^2 - 2 Q_1 Q_2 + Q_2^2 = (Q_1 - Q_2)^2 > 0,$$

Deci, $F' > F$.

1.11. Fie 2 sfere metalice de raze R_1 şi R_2 din care prima este încărcată cu sarcina Q, iar a 2-a este neutră. Se pun în contact cele 2 sfere. Să se arate că condiţia de egalitate a potenţialelor sferelor după punere în contact conduce la condiţia unei valori minime a energiei electrice a sistemului format de cele 2 sfere.

R.: Potenţialul unei sfere încărcată cu sarcina Q şi de rază R este: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$, iar capacitatea este

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (1)$$

După contact pe sfera de rază R_2 va trece sarcina x, iar pe sfera de rază R_1 rămîne sarcina Q-x. Deci, după contact putem scrie $V_1 = V_2$, $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q-x}{R_1}$, $V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{R_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Q-x}{R_1} = \frac{x}{R_2} \Rightarrow x = \frac{QR_2}{R_1+R_2} \overset{(1)}{=} \frac{QC_2}{C_1+C_2}.$$

Energia electrică a unei sfere încărcate are expresia:

$$W = \frac{CV^2}{2} \quad \text{dar} \quad C = \frac{q}{V} \quad \text{deci} \Rightarrow W = \frac{q^2}{2C}$$

Aplicăm această formulă în cazul problemei:

$$W_1 = \frac{(Q-x)^2}{2C_1} \quad \text{şi} \quad W_2 = \frac{x^2}{2C_2} \quad \text{adică} \quad W = W_1+W_2 .$$

Deci, $W = \frac{(Q-x)^2}{2C_1} + \frac{x^2}{2C_2}$, C_1, C_2 = capacităţile electrice ale sferelor.

Derivez W în raport cu x:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{(Q-x)}{C_1} + \frac{x}{C_2}. \text{ Anulez derivata: } \frac{dW}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(Q-x) + C_1 x = 0 \Rightarrow x = \frac{QC_2}{C_1+C_2} \overset{(1)}{=} \frac{QR_2}{R_1+R_2}.$$

Să verificăm că x corespunde unui minim. In acest scop calculez derivata a 2-a:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C}$$. Rezultă că $\frac{d^2W}{dx^2} > 0$ oricare ar fi x, ceea ne

arată că $x = \frac{QC_2}{C_1+C_2}$ corespunde unui minim. Valoarea minimă a

energiei este $W_{min} = \frac{1}{2C_1}\left(Q - \frac{QC_2}{C_1+C_2}\right)^2 + \frac{1}{2C_2}\frac{Q^2C_2^2}{(C_1+C_2)^2} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{C_1}\frac{C_1^2Q^2}{(C_1+C_2)^2} + \frac{1}{2C_2}\frac{Q^2C_2^2}{(C_1+C_2)^2} = \frac{Q^2(C_1+C_2)}{2(C_1+C_2)^2} = \frac{Q^2}{2(C_1+C_2)}.$$

$$\boxed{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o(R_1+R_2)} = W_{min}}$$

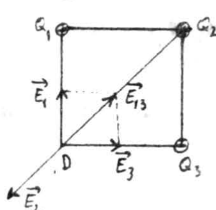
1.12. In vîrfurile A, B și C ale unui pătrat cu latura a se află 3 corpuri punctiforme, cu sarcinile Q_1, Q_2 respectiv $Q_3 = Q_1$. Să se găsească:

a) intensitatea vectorului cîmp electric (modulul) creat de sarcinile Q_1, Q_2, Q_3 în vîrful D al pătratului;

b) potențialul electric în punctul D;

c) lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa un corp punctiform cu sarcina Q_4 din punctul D în centrul O al pătratului. Se dau valorile numerice: $Q_1 = -2\cdot10^6$ C, $Q_2 = 4\sqrt{2}\cdot10^{-6}$ C, $Q_3 = Q_1 = -2\cdot10^{-6}$ C, $Q_4 = 10^{-6}$ C; a = 0,41 m.

R.: a) Fie vectorul cîmp electric rezultant $\vec{E}$ în punctul D:



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (principiul de superpoziție).

Modulele: E_1, E_2, E_3 sînt:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o a^2}, \quad E_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o a^2}.$$

Deoarece: $Q_1 = Q_3$ rezultă:

$$E_1 = E_3, \quad E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o(a\sqrt{2})^2} = \frac{Q_2}{8\pi\varepsilon_o a^2}$$

Deoarece: $Q_2 = Q_1\cdot\sqrt{2}\cdot 2 \Rightarrow E_2 = \sqrt{2}\cdot\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o a^2}$

$= \sqrt{2}\cdot E_1$

Dar: $E_{13} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{2}\cdot E_1$. Deci, $E_{13} = E_2$.

Deoarece, conform figurii $\vec{E}_2$ este dirijat în sens opus vectorului $\vec{E}_{13}$ $\Rightarrow$ Vectorul cîmp electric $\vec{E}$ în D este 0.

b) Sarcinile Q_1, Q_2, Q_3 crează în punctul D potențialele V_1, V_2, V_3 cu $V_1 = V_3 = \dfrac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 a}$ şi $V_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}}$.

Potențialul total V în punctul D are valoarea:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

(potențialul este o mărime aditivă).

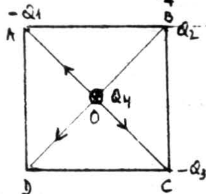
Deci:

$$V = 2\, V_1 + V_3 = \frac{2\, Q_1}{4\pi \varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a}\left(2\, Q_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9\cdot 10^9}{0{,}41}\left(-2\cdot 2\cdot 10^{-6} + \frac{4\sqrt{2}\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}\right) = 0\ V$$

Cele 3 sarcini creează în D un vector cîmp electric $\vec{E} = 0$ şi un potențial $V = 0$.

c) $L = Q_4 U = Q_4(V_D - V_0)$; U = tensiunea electrică dintre punctele D şi O. Potențialul punctului O



$$V_0 = V_1' + V_2' + V_3' = \frac{Q_1}{2\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}} + \frac{Q_2}{2\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}} + \frac{Q_3}{2\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 a \sqrt{2}}(2\, Q_1 + Q_2) = \frac{9\cdot 10^9\cdot \sqrt{2}}{0{,}41}(-2\cdot 2 + 4\cdot \sqrt{2})\cdot 10^{-6} = 50{,}7\cdot 10^3 V.$$

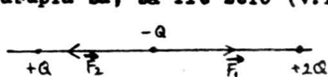
Deoarece $V_D = 0 \Rightarrow L = -Q_4 \cdot V_0 = -0{,}0507$ J.

Semnul "-" pentru lucrul mecanic arată că forța electrică rezultantă (v.figura) ce acționează asupra lui Q_4 este orientată de la O spre D, deci în sens opus deplasării. Deplasarea lui Q_4 de la D la O se face sub acțiunea unei forțe externe.

1.13. 2 corpuri punctiforme, cu sarcinile +Q şi +2Q se găsesc în aer la distanța r unul de altul. La ce distanță de primul corp, pe linia ce uneşte cele 2 corpuri, trebuie să se afle un al 3-lea corp, cu sarcina -Q, pentru a fi în echilibru?

R.: Pentru ca corpul cu sarcina -Q să fie în echilibru este necesar ca rezultanta forțelor coulombiene care acționează

asupra sa, să fie zero (v.figura).



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = F_2$$

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o x^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{2Q^2}{(r-x)^2}$$

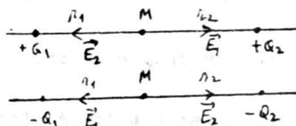
Deci:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{(r-x)^2} \qquad x_1 = (\sqrt{2} - 1)r$$

Soluţia: $x_2 = -r(1 + \sqrt{2})$ este lipsită de sens fizic.

1.14. Intr-un punct situat între 2 corpuri punctiforme încărcate electric cu Q_1 şi Q_2, pe linia ce le uneşte, vectorul cîmp electric este zero. Ce se poate spune despre sarcinile lor şi despre raportul distanţelor celor 2 sarcini la punctul dat?

R.: Corpurile sînt electrizate cu sarcini electrice de acelaşi semn (v.figura).



Este necesar, deci, ca

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \text{sau} \quad E_1 - E_2 = 0$$

$\Rightarrow \quad E_1 = E_2$ sau:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Raportul celor 2 sarcini electrice este egal cu raportul pătratelor distanţelor de la cele 2 corpuri pînă la punctul considerat.

1.15. Două corpuri punctiforme cu sarcinile $Q_1 = 2\cdot10^{-6}$ C respectiv $Q_2 = 8\cdot10^{-8}$ C se găsesc în aer, la distanţa d = 10 cm unul de altul.

a) Care este modulul vectorului cîmp electric produs de fiecare corp încărcat în punctul în care se găseşte celălalt?

b) Ce forţe acţionează asupra fiecărui corp încărcat?

R.:



a)

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1}{d^2} =$$

$$= 1,8\cdot10^6 \ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_2}{d^2} = 7,2\cdot10^4 \ \frac{N}{C}$$

b) $F_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_1Q_2}{d^2} = E_1\cdot Q_2 = 0,144$ N

$F_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q_2Q_1}{d^2} = E_2\cdot Q_1 = 0,144$ N

Deci,

$F_{12} = F_{21}$ și $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21} = 0$

1.16. Două corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile $Q_1 = +4$ q, respectiv $Q_2 = +2$ q sînt situate la distanța d unul de celălalt. In ce punct vectorul cîmp electric rezultant este nul?

R.: Vectorul cîmp electric este nul într-un punct A situat pe dreapta care unește cele 2 corpuri punctiforme electrizate, între cele 2 puncte, la distanța x față de Q_1 și care rezultă din condiția (v.figura).

$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$; $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$

$E_1 = E_2$ sau $\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} =$

$= \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2} \Rightarrow x^2 - 4xd + 2d^2 = 0 \Rightarrow x = (2-\sqrt{2})d$

1.17. Pot exista puncte în spațiu în care vectorul cîmp electric să fie nul, iar potențialul să fie diferit de zero?

R.: a) Pe dreapta care unește 2 corpuri punctiforme, electrizate cu sarcini de același semn q_1 și q_2, există un punct situat între acestea în care $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$, iar $V = V_1 + V_2$ este diferit de zero. Intr-adevăr, dacă notăm cu x abscisa acestui punct măsurată față de q_1 (v.figura) și d distanța dintre sarcini, putem scrie:

1) $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$

2) $\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}$

3) $V_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x}$ și $V_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}$

4) $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{x} + \dfrac{q_2}{d-x}\right)$.

Din ecuaţia 2) $\Rightarrow \frac{\sqrt{q_1}}{x} = \frac{\sqrt{q_2}}{d-x} \Rightarrow d\sqrt{q_1} - x\sqrt{q_1} =$

$$= x\sqrt{q_2} \Rightarrow x = \frac{d\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$$

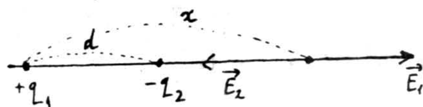
Pentru această valoare a lui x pentru care $\vec{E} = 0$, potenţialul $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{d-x}\right)$ este $\neq 0$.

Intr-adevăr, dacă înlocuiesc pe x, după efectuarea calculelor $\Rightarrow$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2$, care este diferit de zero.

b) Pe dreapta care uneşte 2 corpuri punctiforme electrizate cu sarcini de semne diferite $q_1 \cdot q_2 < 0$, există un punct, situat în afara acestora, în care $\vec{E} = 0$, iar V este $\neq 0$.

Dacă $|q_1| > |q_2|$ atunci acest punct se află de partea corpului cu sarcina q_2 la o distanţă x de q_1 a cărei expresie rezultă din condiţia (v.figura): $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$.



$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$E_2 = +\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (x-d)^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = +\frac{q_2}{(x-d)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{q_1}}{x} = \frac{\sqrt{q_2}}{x-d} \Rightarrow x = \frac{d}{1-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}$$

iar $V = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (x-d)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x} - \frac{q_2}{x-d}\right)$

După calcule $\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2})^2 \neq 0$

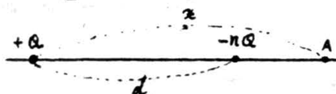
Analog, dacă $q_1 \cdot q_2 < 0$, dar $|q_2| > |q_1|$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})^2$$

c) Punctele din interiorul unui strat sferic încărcat electric.

1.18. 2 corpuri cu sarcinile electrice Q şi -nQ se află în vid, la distanţa r unul de celălalt. In ce punct de pe segmentul ce uneşte corpurile potenţialul este nul? (n întreg pozitiv şi diferit de 1).

R.:a) Fie punctul A situat la dreapta lui -nQ pentru



care $V_A = V_1+V_2 = 0$ cu

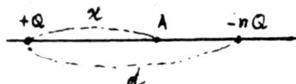
$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} \quad \text{şi}$$

$$V_2 = \frac{-nQ}{4\pi\varepsilon_0(x-d)} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{n}{x-d} = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{1-n}$$

Deoarece n este întreg pozitiv $\neq 1 \Rightarrow$ x este negativ.

Deoarece prin ipoteză d este pozitiv, punctul A nu poate fi la dreapta sa decît dacă este pozitiv.

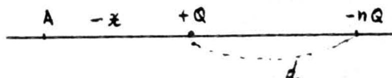
b) Deoarece $x < 0$ rezultă că punctul A poate fi între Q şi -nQ.



Deci: $V_A = V_1+V_2 = \frac{Q}{x} - \frac{nQ}{d-x} = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{d}{n+1}$$

d) Dacă punctul A se află în stînga lui +Q:



Putem scrie:

$$V = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0|x|} + \frac{(-nQ)}{4\pi\varepsilon_0(d+|x|)} = 0 \Rightarrow |x| = \frac{d}{n-1}$$

1.19. Să se calculeze vectorul cîmp electric generat de un inel subţire semicircular, avînd raza r, încărcat cu sarcină electrică pozitivă a cărei densitate liniară este λ, în centrul O al cercului din care face parte semiinelul (v.figura).

R.: Fie un element de lungime elementar $d\ell$ aparţinînd inelului. Fie dq sarcina electrică elementară ce revine elementului $d\ell$. Sarcina dq va genera la distanţa R în punctul O vectorul cîmp electric elementar $d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{n} \quad \text{cu} \quad \vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

In coordonate polare plane: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Elementul de lungime: $dl = r\,d\theta$.

Deoarece

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda\,dl = \lambda\cdot r\cdot d\theta \Rightarrow$$

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\cdot r\cdot d\theta}{r^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{(r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j})}{r} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})d\theta}{r}$$

Integrînd după unghiul θ de la 0 la π $\Rightarrow$

$$\int d\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \vec{j}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right].$$

Deoarece:

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot d\theta = 0\text{ , iar }\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{j}}$$

Rezultă că vectorul $\vec{E}$ este îndreptat de-a lungul axei Oy în sensul negativ al acesteia. Mărimea (modulul) lui $\vec{E}$ este

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}\qquad r = \text{raza cercului}$$

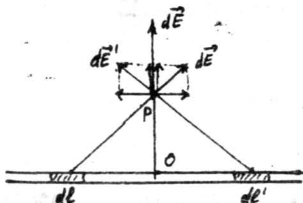
Deci, modulul vectorului cîmp electric al unei linii semicirculare de sarcină este direct proporţional cu densitatea liniară de sarcină λ şi invers proporţională cu puterea întîi a razei r a semicercului.

1.20. Fie un fir rectiliniu infinit, încărcat uniform cu sarcină pozitivă. Fie λ -densitatea liniară de sarcină a firului.

a) Să se arate că vectorul cîmp electric $\vec{E}$ într-un punct exterior firului, generat de sarcina firului este perpendicular pe fir.

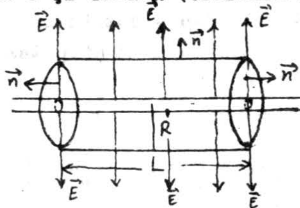
b) Aplicînd legea Gauss, să se calculeze modulul vectorului cîmp electric în acest punct.

R.: a) Să arătăm că vectorul cîmp $\vec{E}$ este perpendicular pe fir. Fie P un punct arbitrar în spațiu unde calculăm vectorul cîmp electric $\vec{E}$. Fie punctul O proiecția punctului P pe conductor. Oricărui element de lungime $d\ell$, situat la stînga lui O îi corespunde un element de fir $d\ell'$ (v.figura) egal, situat simetric față de O, la dreapta.



Sarcinile $dq = \lambda d\ell$ și $dq' = \lambda d\ell'$ generează în punctul P vectorii cîmp $\vec{dE}$ și $\vec{dE'}$ ale căror componente paralele cu conductorul se anulează. Componentele normale la conductor se adună și dau vectorul cîmp electric rezultant $\vec{dE}$, care este perpendicular pe conductor.

b) Fie o suprafață cilindrică, coaxială cu firul de lungime L și rază R (cilindru gaussian) (v.figura). Pe suprafața lui laterală, $\vec{E}$ are aceeași valoare (modul) și este orientat paralel cu versorul $\vec{n}$ al normalei pe această suprafață. Pe suprafețele bazelor cilindrului, $\vec{E}$ este perpendicular pe versorul $\vec{n}$ dus la aceste suprafețe S_b.



Fluxul vectorului cîmp electric E pe aceste suprafețe este:

$$\Phi^{\vec{E}}_{baze} = \vec{E}\cdot\vec{S_b} = \vec{E}\cdot S_b\cdot\vec{n} = S_b\cdot\vec{E}\cdot\vec{n} = S_b\cdot E\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Să calculăm fluxul prin suprafața laterală

$$\Phi^{\vec{E}}_{lateral} = \vec{E}\cdot S_\ell = \vec{E}\cdot S_\ell\ \vec{n} = S_\ell\cdot E\cdot 1\cdot \cos 0^\circ = S_\ell\cdot E$$

Suprafața laterală a cilindrului este $S_\ell = 2\pi R\cdot L$, și deci:

$$\Phi^{\vec{E}}_{lateral} = 2\cdot\pi\cdot R\cdot L\cdot E$$

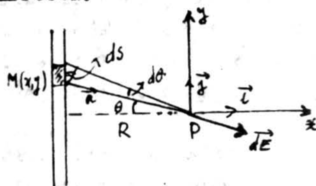
Conform legii Gauss, fluxul total Φ^{E}_{total} este egal cu:

$\oint^{\vec{E}}_{total} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, Q = sarcina totală de pe porțiunea de conductor aflată în interiorul cilindrului de lungime L:

$$Q = \lambda \cdot L. \text{ Deci: } \oint^{E}_{total} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 R}}$$

1.21. Să se rezolve problema precedentă printr-o metodă directă.



R.: Alegem un sistem de axe xOy (v. figura) și fie un element de lungime $d\ell$ aparținînd conductorului și care conține cantitatea de electricitate dq considerată punctiformă și pozitivă. Aceasta generează în punctul P vectorul cîmp electric $\vec{dE}$ (v. figura). Notăm coordonatele (x,y) ale punctului M și putem scrie:

$$x = r \cdot \cos\theta \; ; \quad y = r \cdot \sin\theta \; ; \quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} =$$

$$= r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \quad \text{și} \quad \vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{în}$$

care $\vec{r}$ = vectorul de poziție al punctului M.

Din figură rezultă:

$$\cos\theta = \frac{R}{r}, \quad \cos\theta = \frac{dS}{d\ell}, \quad dS = r\,d\theta \text{ . Deoarece: } dq = \lambda\,d\ell$$

putem scrie:

$$\vec{dE} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d\ell}{r^2} \cdot \frac{r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}{r} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{r^2}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r \cdot d\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{r^2}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{dE} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d\theta}{R}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

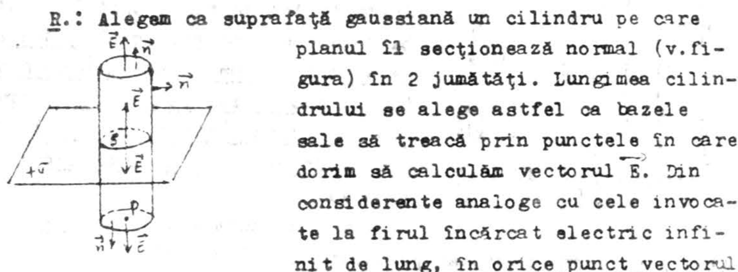
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})\,d\theta$$

Deoarece: $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 2$ şi $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sin\theta\,d\theta = 0$

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{i}$. Deci, vectorul cîmp electric total $\vec{E}$ are direcţia axei Ox şi modulul $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$. Rezultatul coincide cu cel anterior.

1.22. Fie un plan infinit încărcat uniform cu sarcină pozitivă cu densitate superficială + . Să se găsească expresia vectorului cîmp electric E într-un punct exterior P planului cu ajutorul lui Gauss.

R.: Alegem ca suprafaţă gaussiană un cilindru pe care planul îl secţionează normal (v.figura) în 2 jumătăţi. Lungimea cilindrului se alege astfel ca bazele sale să treacă prin punctele în care dorim să calculăm vectorul $\vec{E}$. Din considerente analoge cu cele invocate la firul încărcat electric infinit de lung, în orice punct vectorul cîmp electric $\vec{E}$ este orientat perpendicular pe plan.



Deoarece vectorul $\vec{E}$ este paralel cu suprafaţa laterală a cilindrului, fluxul

$$\Phi^{\vec{E}}_{S\ \text{laterală}} = \vec{E}\cdot\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot S = E\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}\,S = 0$$

iar fluxul prin cele 2 baze este:

$$\Phi^{\vec{E}}_{S\ \text{baze}} = 2\cdot\vec{S}\cdot\vec{E} = 2\cdot S\cdot\vec{n}\cdot\vec{E} = 2\ S\cdot E\cdot\cos 0^{\circ} = 2\cdot S\cdot E$$

Aplicăm legea Gauss: $\Phi_{total} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$; Q = sarcina totală din interiorul gaussienei cilindrice:

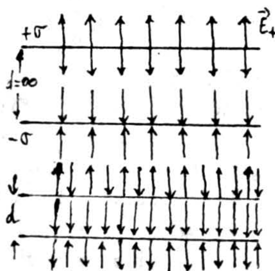
$Q = S\cdot\sigma$ S = suprafaţa de intersecţie a gaussienei cu planul infinit. Deci:

$$2\,S\,E = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Vectorul cîmp electric $\vec{E}$ generat de un plan infinit încărcat uniform cu sarcină de densitate superficială σ este perpendicular pe suprafaţa planului, are modulul E direct proporţional cu densitatea de sarcină σ şi este acelaşi în toate punctele spaţiului.

1.23. Să se găsească mărimea, direcţia şi sensul vectorului cîmp electric $\vec{E}$ creat de 2 plane paralele infinite, încărcate uniform cu sarcină de semn opus, avînd densităţile de sarcină σ_+ respectiv σ_- cu $|\sigma_+| = |\sigma_-| = \sigma$.

R.: Vectorul cîmp electric $\vec{E}$ este dirijat normal la cele 2 plane ca în figură.



Aducînd cele 2 plane separate la distanţă foarte mare, pînă la distanţa d se constată grafic că între plane vectorii cîmp electric $\vec{E}$ se adună, iar în exteriorul planelor vectorii cîmp electric $\vec{E}$ fiind orientaţi în sens opus se anulează reciproc (v. figura).

Fie un punct P între plane. Atunci conform problemei precedente, putem scrie:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Deci $\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

Modulul vectorului cîmp electric creat de 2 plane infinite încărcate electric are valoarea de 2 ori mai mare ca modulul vectorului cîmp electric creat de un singur plan, încărcat cu aceeaşi densitate superficială de sarcină.

1.24. Fie un strat sferic încărcat cu sarcină pozitivă cu densitate superficială $+\sigma$ şi avînd raza R. Să se găsească vectorul cîmp electric $\vec{E}$ (direcţie, modul, sens) generat de

această sarcină.

R.: Utilizăm legea Gauss. Fie 2 puncte: P_i în interiorul sferei încărcate şi P_e în exteriorul sferei încărcate. Pentru a calcula modulul vectorului cîmp electric $\vec{E}$ în P_i ne imaginăm o suprafaţă gaussiană sferică S_i concentrică cu stratul sferic care trece prin P_i.

Dacă notăm prin E_i valoarea cîmpului electric pe suprafaţa S_i în conformitate cu legea Gauss putem scrie:

$$\phi_{S_i} = \vec{E_i}\cdot\vec{S_i} = E_i\cdot S_i \cos 0^\circ = E_i\cdot S_i = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

în care Q_i = sarcina totală din interiorul suprafeţei S_i, care, cum se vede din figură este zero.

Deci, $E_i\cdot 4\pi r_i^2 = 0 \implies E_i = 0$ (deoarece $r_i \neq 0$).

Concluzie: Vectorul cîmp electric în interiorul stratului sferic încărcat cu sarcină electrică este egal cu zero.

Fie P_e un punct în exteriorul stratului sferic. Ne imaginăm o suprafaţă gaussiană sferică S_e cu raza r_e, concentrică cu stratul sferic. In toate punctele suprafeţei S_e vectorul cîmp electric $\vec{E}_e$ este perpendicular pe suprafaţa ($\vec{E} \parallel \vec{n}$), iar modulul acestui vector E_e are aceeaşi valoare (toate punctele suprafeţei S_e sînt la aceeaşi distanţă de stratul sferic de sarcină).

Să calculăm fluxul vectorului cîmp electric $\vec{E}_e$ prin S_e:

$$\phi^{\vec{E}}_{S_e} = E_e\cdot S_e \cos 0^\circ = E_e\cdot 4\pi r_e^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Q_{int} = sarcina totală din interiorul lui S_e, care are valoarea:

$$Q_{int.} = \sigma\cdot S = \sigma\cdot 4\pi\cdot R^2$$

S = suprafaţa stratului sferic de rază R.

Deci:

$$\boxed{E_e = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2}} \quad \text{şi vectorial } \vec{E}_e = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}_e}{r_e^3}$$

Concluzie: Valoarea cîmpului electric generat de sarcina Q distribuită uniform pe un strat sferic cu raza R, este aceeaşi cu valoarea cîmpului electric generat de sarcina Q dacă ea ar fi o sarcină punctiformă în centrul stratului sferic.

In figură se arată dependenţa de r a modulului cîmp electric generat de stratul sferic.

1.25. O sarcină punctiformă Q se află la distanţa a = constant faţă de o distribuţie liniară şi infinită de sarcini electrice cu densitatea liniară de sarcină λ = constantă. Care este forţa care acţionează asupra sarcinii Q?

R.: Facem ipoteza că sarcina distribuţiei şi sarcina Q sînt pozitive.

Alegem un sistem de axe xOy ca în figură.

Fie sarcina elementară dq care se află în elementul de lungime dx.

Sarcina dq determină o forţă elementară $d\vec{F}$ de interacţiune în punctul R asupra sarcinii punctiforme Q, care se află în punctul R:

(1) $$d\vec{F} = \frac{Q \cdot dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda \cdot Q \cdot dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda \cdot dx\right)$$

Forţa totală se obţine prin integrarea relaţiei (1) pentru $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r^3}\vec{r}$$

Deoarece vectorul $\vec{r}$ are componentele x şi a acesta se scrie: $\vec{r} = x\vec{i} + a\vec{j}$, iar $r = \sqrt{x^2+a^2}$. Deci:

$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(x\vec{i} + a\vec{j})}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

care se compune din 2 integrale I_1 şi I_2 :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x^2)}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+a^2)^{-3/2+1}}{-3/2+1} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$I_2 = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = 2a \int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

Aceasta este o <u>integrală binomă</u> care se face <u>cu ajutorul substituției</u>: $x^2 + a^2 = x^2t^2$. Impart cu $x^2 \Rightarrow 1 + a^2 \cdot x^{-2} = t^2$.

Diferențiez: $-2 \cdot x^{-3} \cdot a^2 \cdot dx = 2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow dx = -\frac{tx^3}{a^2}\,dt$. Deci:

$$\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{t^{-2}}{a^2} \cdot dt. \text{ Deci:}$$

$$I_2 = \frac{2a}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}} \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{2}{a}$$

Deci: $\vec{F} = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 a} \vec{j}$. Modulul: $F = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 a}$

<u>1.26</u>. Fie Q sarcina din problema (1.25). Presupunem că aceasta începe să se miște în direcția axei Oy cu viteza inițială $v_0 = 0$ sub influența forței de interacțiune $F = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y}$.

Să se calculeze viteza sarcinii Q la distanța 2a de origine, cunoscînd masa particulei m.

<u>R</u>.: Se scrie legea a 2-a a lui Newton, ținînd cont că forța $\vec{F} = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y} \vec{j}$ este dirijată în direcția axei Oy:

$$ma_y = F_y \text{, în care: } a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad F_y = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y}$$

Deci:

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y} \qquad (1)$$

Deoarece: $v_y = \frac{dy}{dt}$; $dt \cdot v_y = dy \Rightarrow dt = \frac{dy}{v_y}$

Inmulțind relația (1) cu $dt \Rightarrow m\,dv_y = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y} \cdot dt$

Inlocuim pe $dt \Rightarrow m\,dv_y = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0 y} \cdot \frac{dy}{v_y} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad m \cdot dv_y \cdot v_y = \frac{\lambda Q}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{dy}{y}$$

Integrăm această relaţie:

$$m\int_0^v v_y\, dv_y = \frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^y \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{mv_y^2}{2} = \frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{y}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_y = \sqrt{\frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{y}{a}}$$

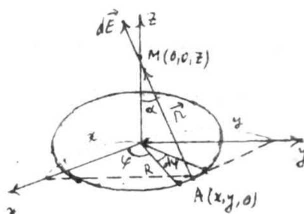
Pentru $y = 2a \Rightarrow v_y(2a) = \sqrt{\frac{\lambda Q}{\pi\varepsilon_0 m}\ln 2}$

1.27. Un conductor inelar de rază cunoscută R este încărcat uniform cu sarcina Q. Fie M un punct pe perpendiculara dusă din centrul conductorului inelar.

a) Să se scrie expresia vectorului cîmp electric $\vec{E}$ în punctul M şi să se scrie modulul acestuia.

b) Să se determine punctul M astfel încît în acest punct modulul vectorului $\vec{E}$ notat cu E să aibă valoarea maximă. Să se calculeze valoarea maximă a acestui modul.

R.: Fie un element de lungime $d\ell$ al conductorului inelar şi care conţine sarcina elementară dQ. Aceasta generează în punctul M vectorul cîmp electric elementar $\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ în care: $\vec{r} = (0-x)\,\vec{i} + (0-y)\,\vec{j} + (z-0)\,\vec{k}$



In coordonate polare plane:

$x = R\cos\varphi$; $y = R\sin\varphi$; $z = z$

$r = -R\cos\varphi.\vec{i} - R\sin\varphi\cdot\vec{j} + z\,\vec{k}$

$r^2 = R^2 + z^2$

Deci: $$\vec{dE} = -\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-R\cos\varphi\,\vec{i} - R\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

Elementul de lungime $d\ell$ are expresia: $d\ell = R.d\varphi$.

Fie λ densitatea liniară de sarcină: $\lambda = \frac{dQ}{d\ell} \Rightarrow dQ = \lambda\cdot d\ell = \lambda\cdot R\cdot d\varphi$. Considerînd z fixat (punctul M dat) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (-R\cos\varphi \cdot \vec{i} - R\sin\varphi \cdot \vec{j} + z\vec{k})d\varphi$$

Deoarece: $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$

$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot z \cdot \vec{k}$

Lungimea conductorului fiind: $l = 2\pi R \Rightarrow \int dQ =$ $= \lambda \int dl = \lambda \cdot l = 2\pi R\lambda$.

Deci: $Q = 2\pi R\lambda$. Putem scrie:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Deci vectorul cîmp electri $\vec{E}$ este dirijat de-a lungul axei Oz.

Modulul vectorului $\vec{E}$ este:

$$E(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Acesta este funcţie de z.

Valoarea maximă a lui E(z) se obţine calculînd derivata a I-a.

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(R^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2+z^2)^{3/2}}{(R^2+z^2)^3}$$

Anulez derivata şi de aici rezultă rădăcina reală:

$$z_1 = R/\sqrt{2}$$

Calculul derivatei a 2-a conduce la expresia:

$$\frac{d^2E(t)}{dz^2} = -\frac{3z(R^2+2z^2)}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

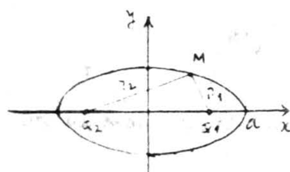
Introducînd rădăcina z_1 în expresia derivatei a 2-a obţinem o valoare negativă a derivatei a 2-a $\Leftrightarrow$ z_1 corespunde unui maxim pentru E(z).

Valoarea maximă a modulului E(z) este $E(z_1)$:

$$E(z_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{R/\sqrt{2}}{(R^2+R^2/2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{R^2}$$

1.28. In focarele unei elipse cu semiaxa mare a se află 2 sarcini pozitive Q_1 şi Q_2. Să se calculeze distanţa r_1 a acelui punct de pe elipsă în care potenţialul total creat de cele 2 sarcini are valoarea <u>minimă</u>, precum şi valoarea minimă a potenţialului.

<u>R</u>.: Elipsa este prin definiţie locul geometric a punctelor cu proprietatea că suma distanţelor la 2 puncte numite focare este constantă şi egală cu 2a, oricare ar fi punctul aparţinînd elipsei (v.figura). a = semiaxa mare a elipsei. Deci:



$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Potenţialele create de Q_1 şi Q_2 în punctul M sînt:

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{r_1} \quad \text{şi} \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{r_2}$$

Potenţialul total:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) \quad \text{sau:}$$

$$V(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{2a-r_1}\right)$$

Derivez $V(r_1)$ în raport cu r_1 ⟹

$$\frac{dV(r_1)}{dr_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{(2a-r_1)^2}\right]$$

Anularea derivatei: $\frac{dV(r_1)}{dr_1} = 0$ conduce la rădăcina:

$$r_1 = 2\,a\Big/\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} + 1$$

Să arătăm că r_1 corespunde unui <u>minim</u> pentru $V(r_1)$.

Pentru aceasta calculăm derivata a 2-a:

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{r_1^3}\quad \frac{Q_2}{(2a-r_1)^3}\right]$$

Întrucît Q_1 şi Q_2 sînt pozitive prin ipoteză, iar

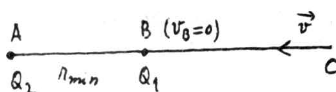
$r_1 = 2a/\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} + 1 < 2a$ deoarece $\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} + 1 > 1 \Rightarrow$ că valoarea obţinută pentru derivata a 2-a calculată pentru $r = r_1$ este <u>pozitivă</u>.

Deci, $r = r_1$ corespunde unui minim pentru funcţia $V(r)$. Valoarea minimă a funcţiei se obţine după calcule simple:

$$V_{min}(r) = V(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{2a-r_1}\right) = \frac{(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2}{8\pi a\varepsilon_0}$$

<u>1.29</u>. Se dau 2 sarcini <u>pozitive</u> Q_1 şi Q_2. Sarcina Q_2 se consideră fixă. Prima sarcină se află la distanţă foarte mare de a 2-a şi se îndreaptă spre aceasta cu viteza $\vec{v}$. Care este expresia <u>distanţei minime</u> pînă la care se poate apropia sarcina Q_1 dacă masa acesteia este m?

<u>R</u>.: Vom aplica legea conservării energiei pentru cele 2 puncte: punctul B în care particula de sarcină Q_1 are viteza $v_B = 0$ şi un punct C care se află la o distanţă <u>foarte mare de Q_2</u>, unde, prin ipoteză, are viteza $\vec{v}$ constantă.



Deci, $E^B_{totală} = E^C_{totală}$, în care:

$$E^B_{totală} = E^B_{cin.} + E^B_{pot.} \quad \text{şi} \quad E^C_{totală} = E^C_{cin.} + E^C_{pot.}$$

Dar,

$$E^B_{cin.} = \frac{mv_B^2}{2} = 0 \quad \text{şi} \quad E^B_{pot.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{min.}}$$

$$E^C_{cin.} = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad \text{şi} \quad E^C_{pot.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}$$

Deoarece r <u>are o valoare foarte mare</u> $E^C_{pot.} \simeq 0$.

Deci:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{min}} = \frac{mv^2}{2}$$

Resultă:

$$r_{min.} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{mv^2}$$

1.30. Sarcina +Q se distribuie uniform de-a lungul unei spire circulare de rază R. Fie o sarcină +q pe dreapta perpendiculară pe planul spirei trecînd prin centrul său, la o distanță h fixă de planul spirei. Să se găsească: a) expresia forței $\vec{F}$ ce acționează asupra sarcinii q; b) distanța $h = h_0$ pentru care forța F devine maximă și valoarea F_{max}.

R.: a) Fie un element de arc $d\ell$ al spirei care conține sarcina dQ. Sarcina dQ va acționa asupra lui q cu forța $\vec{dF}$. Fie un sistem de axe xyz (v.figura).

Coordonatele polare ale punctului A sînt: R, φ. Deci,

$x = R\cos\varphi$ și $y = R\sin\varphi$

Punctul M are coordonatele:

M(0,y,z = h)

Deci:

$$\vec{AM} = \vec{r} = (0-x)\vec{i} + (0-y)\vec{j} + z\vec{k}$$

Sau:

$$\vec{r} = -R\cos\varphi\, i - R\sin\varphi\, \vec{j} + z\vec{k}$$

Deci:

$$\vec{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ \cdot q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot dQ \cdot (-R\cos\varphi\,\vec{i} - R\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

în care: $r = \sqrt{R^2 + z^2}$

Deoarece: $d\ell = R \cdot d\varphi$ și $dQ = \lambda\, d\ell$ (λ = densitate liniară de sarcină) $\Rightarrow$ $dQ = \lambda \cdot R \cdot d\varphi$.

Prin integrare $\Longrightarrow$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot \lambda \cdot R}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \Big[-R\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot \vec{i} -$$

$$-R\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi\,\vec{j}+z\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\vec{k}\Big].$$

Deoarece: $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi=\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=0$;

$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi=-\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}=0$ şi

$\int_0^{2\pi}d\varphi=\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi \Longrightarrow$

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot\lambda\cdot R\cdot z\cdot 2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

Deoarece: $Q=2\pi R\lambda \Longrightarrow$

$$\vec{F}=\frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}\ ;\qquad (z=h)$$

Deci, forţa $\vec{F}$ este dirijată de-a lungul axei Oz, iar modulul său este:

$$F=\frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\qquad(1)$$

b) Derivez (1) în raport cu z $\Longrightarrow$

$$\frac{dF}{dz}=\frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(R^2+z^2)^{3/2}-2\cdot 3/2\cdot(R^2+z^2)^{1/2}\cdot 2z}{(R^2+z^2)^3}$$

Anulînd derivata $\frac{dF}{dz}=0 \Rightarrow z_1=\frac{R}{\sqrt{2}}$

Se verifică uşor că dacă:

$$z<z_1\Rightarrow\frac{dF}{dz}>0\text{, iar pentru } z>z_1\Rightarrow\frac{dF}{dz}<0$$

Deci, $z_1=\frac{R}{\sqrt{2}}$ corespunde unui maxim al funcţiei F(z).

$$\boxed{F_{max}=F(z_1)=\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

1.31. Fie o sarcină +Q distribuită uniform de-a lungul

unei spire circulare de rază R. Pe dreapta care trece prin centrul spirei, perpendicular pe planul acesteia, se află o sarcină punctiformă +q fixată la distanța $h_o = R/\sqrt{2}$ de centrul spirei. La un moment dat, sub acțiunea forței $F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}}$ (v.problema următoare) se pune în mișcare cu viteza inițială nulă. Care va fi expresia vitezei sarcinii q la distanța $h = 2\,h_o$ considerînd masa m a particulei cunoscută? Se neglijează cîmpul gravitațional.

R.: Legea a 2-a a lui Newton conduce la:

$$m\frac{dv}{dt} = F = \frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

Deoarece $v = \frac{dh}{dt}$ sau $dh = v\cdot dt$, după înmulțirea relației (1) cu dh $\Rightarrow$

$$m\,dv\cdot v = \frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{h\,.\,dh}{(R^2+h^2)^{3/2}}$$

Integrînd $\Rightarrow$

$$m\int_0^v v\cdot dv = \frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{h_o}^{2h_o} \frac{h\cdot dh}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{mv^2}{2}$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$R^2 + h^2 = x \Rightarrow dx = 2\,h\cdot dh$$

Deci:

$$I = \int\frac{h.dh}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{1}{2}\;\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = -x^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

sau:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\;,\ \text{deci} \int_{h_o}^{2h_o}\frac{h.dh}{(R^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{R^2+4h_o^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2+h_o^2}}$$

Inlocuind: $h_o = R/\sqrt{2} \Longleftrightarrow$ valoarea integralei definite I:

$$I = \frac{1}{\sqrt{R^2+R^2/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+2R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{3}} - \frac{1}{R\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}\cdot R}$$

Deci,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}\cdot R} \Rightarrow \boxed{v = \frac{q\cdot Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot m\cdot R} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}}$$

1.32. Fie un triunghi echilateral de latură a şi 2 sarcini punctiforme egale Q plasate în punctele B şi C (v.figura) ale triunghiului. Să se calculeze lucrul mecanic pentru a deplasa o sarcină q din punctul A.

a) în punctul D aşezat la distanţa a de A pe prelungirea laturii BA;

b) în punctul E aşezat la distanţa a de A pe paralela dusă prin A la latura BC.

R.: a) Lucrul mecanic $W_{AD} = q(V_A - V_D)$

în care $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

$$V_D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(2a)^2-a^2}}$$

$$V_D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Deci,

$$W_{AD} = q\left[\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b) $W_{AE} = q(V_A - V_E)$, în care $V_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |EB|}$

şi $|EB| = 2|EK| = 2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2} = \sqrt{3}\,a$

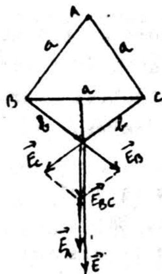
Deci,

$$W_{AE} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

1.33. In vîrfurile unui triunghi echilateral ABC avînd latura „a" se află trei sarcini egale Q. Să se calculeze modulul vectorului cîmp electric $\vec{E}$ şi potenţialul V în:

a) punctul F aflat pe mediatoarea laturii BC la distanţa

$b = a/\sqrt{2}$ de B (se va lua $\varepsilon_r = 1$).



R.: a) Putem scrie relaţiile

$$E_B = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 (a/\sqrt{2})^2} = E_C$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 (\sqrt{3}\frac{a}{2} + \frac{a}{2})^2} .$$

$$E = E_{BC} + E_A$$

$$E_{BC} = \sqrt{E_B^2 + E_C^2 + 2 E_B E_C \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\,Q}{4\pi\,\varepsilon_0 a^2}$$

Deci,

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 a^2} \left(\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2} + 2\sqrt{2}\right)$$

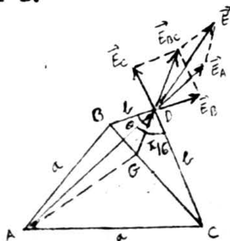
Potenţialul V are expresia:

$$V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a/\sqrt{2}} + \frac{1}{a/\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{3}+1)a/2}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 a} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)$$

1.34. In vîrfurile unui triunghi echilateral de latură „a" se află 3 sarcini punctiforme Q. Să se calculeze modulul vectorului cîmp electric $\vec{E}$ şi potenţialul V în:

a) punctul D aflat pe mediatoarea, perpendiculară pe planul triunghiului ABC, a laturii BC, la distanţa b = a de punctul B.



R.: $E_{BC} = \sqrt{E_B^2 + E_C^2 + 2 E_B E_C \cos\frac{\pi}{3}} =$

$$= 2 E_B \cos\frac{\pi}{6} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(AD)^2}$$ în care

$$(AD)^2 = (AG)^2 + (DG)^2$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 a^2}$$

Modulul vectorului cîmp total $\vec{E}$ este:

$$E = \sqrt{E_A^2 + E_{BC}^2 + 2\,E_A E_{BC}\cos\theta} =$$

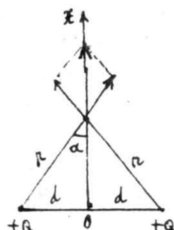
$$= \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a^2}\sqrt{\frac{4}{9} + 1 + \frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a^2}\,\frac{1}{3}\sqrt{6\sqrt{2} + 13}$$

Funcţia potenţial în punctul D este:

$$V = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}\,a}\right) = \frac{2\,Q}{4\pi\,\varepsilon_0 a}\;\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

1.35. O particulă de sarcină q se deplasează pe axa Ox aşezată la o distanţă d egală de două sarcini punctiforme +Q plasate în punctele A şi B astfel încît axa Ox şi punctele date să fie în acelaşi plan. Să se calculeze: a) valoarea maximă a forţei ce acţionează asupra sarcinii q; b) să se afle valorile extreme ale energiei potenţiale a sistemului format din cele 3 sarcini.



R.: a) Modulul forţei rezultante care acţionează asupra sarcinii q are expresia

$$F = 2\,\frac{q\cdot Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \text{în care}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{r^2-d^2}/r\,. \quad \text{Rezultă}$$

$$F = \frac{qQ}{2\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{r^2-d^2}}{r^3}$$

Să calculăm derivata de ordinul unu:

$$\frac{dF(r)}{dr} = F'(r) = \frac{3d^2-2r^2}{r^4\sqrt{r^2-d^2}}\cdot\frac{qQ}{2\pi\,\varepsilon_0}$$

Anulînd derivata rezultă rădăcinile: $r_{12} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,d$.

Analizînd semnul derivatei întîi se constată că rădăcina $r_1 = +\sqrt{\frac{3}{2}}\,d$ corespunde unui maxim pentru funcţia $F(r)$. Valoarea maximă a forţei $F(r)$ este $F(r_1)$.

$$F(r_1) = \frac{qQ}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{d^2}$$

b) Energie potențială de interacție dintre cele 3 sarcini are expresia

$$E_p(r) = \frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r} + \frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r} + \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} = \frac{2\,qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r} + \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d}$$

Această expresie este <u>maximă</u> pentru $r = d$ dacă $q > 0$ și are valoarea $E_p(d) = \frac{2\,qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} + \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d}(2\,q+Q)$.

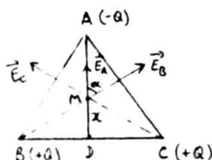
Pentru $q > 0$, valoarea minimă a energiei potențiale $E_p = \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d}$ și se obține pentru $r \to \infty$. Pentru $q < 0$, $E_p(r)$ este minimă pentru $r = d$ și are valoarea

$$E_p = \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} - \frac{2|q|Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d}(Q-2|q|)$$

<u>1.36</u>. Fie triunghiul isoscel ABC avînd în vîrfurile B și C sarcinile punctiforme Q, iar în A sarcina punctiformă -Q. Să se calculeze modulul vectorului cîmp electric în punctul de pe mediatoarea laturii BC în care potențialul produs de cele 3 sarcini are valoarea zero.

Date numerice: AC = AB = 5 cm, BC = 8 cm, Q = 1 nC.

<u>R</u>.: Fie x distanța DM; în punctul M se presupune $V_M = 0$.



$$V_M = \frac{2\,Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\left(x^2 + \frac{BC^2}{4}\right)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\left[\left(AB^2 - \frac{BC^2}{4}\right)^{1/2} - x\right]}$$

Condiția de anulare $V_M = 0$ conduce la ecuația:

$$\left(x^2 + \frac{BC^2}{4}\right) = 4\left[\left(AB^2 - \frac{BC^2}{4}\right)^{1/2} - x\right]^2$$

Inlocuind datele numerice $\Longrightarrow$ ecuația $3x^2 - 24\,x + 20 = 0$ avînd rădăcina acceptabilă $x = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{21}$.

Vectorul cîmp electric rezultant: $\vec{E}_{BC} = \vec{E}_B + \vec{E}_C$ fiind orientat de-a lungul mediatoarei AD $\Rightarrow$

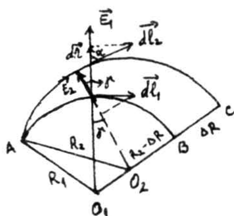
$$E_{BC} = 2\,E_B\cos\alpha = 2\,E_B\,\frac{x}{\left(x^2 + \frac{BC^2}{4}\right)^{1/2}}$$

Deci

$$E = E_A + E_{BC} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[\left(AB^2 - \frac{BC^2}{4}\right)^{1/2} - x\right]^2} + \frac{2x}{\left(x^2 + \frac{BC^2}{4}\right)^{3/2}}\right\}.$$

Avînd în vedere că $1/4\pi\,\varepsilon_0 = 9\cdot10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}$ calculele numerice conduc la valoarea $E = 1{,}9$ V/m.

1.37. In punctul O_1 se află o sarcină punctiformă Q_1. Utilizînd formula lucrului mecanic elementar din mecanică să se calculeze lucrul mecanic necesar deplasării unei sarcini q din punctul A în B şi din A în C, unde A şi B se află pe cercul de raza R_1 şi centrul în O_1, iar puncte A, C se află pe cercul de rază R_2 şi centrul O_2 (v.figura).



R.:

$$W_{\widehat{AB}} = \int_A^B \vec{F}_1\cdot\vec{dl}_1 = q\int_A^B \vec{E}_1\cdot\vec{dl}_1 =$$

$$= q\int_A^B \vec{E}_1\cdot dl_1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$W_{\widehat{AC}} = \int_A^C \vec{F}_2\cdot\vec{dl}_2 = q\int_A^C \vec{E}_2\cdot\vec{dl}_2 =$$

$= q\int_A^C E_2\cdot dl_2\cdot\cos\alpha$. Deoarece $dl_2\cdot\cos\alpha = dr \Rightarrow$

$$W_{\widehat{AC}} = q\int_A^C E_2\cdot dr = q\int_A^C \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{qQ_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_A^C\frac{dr}{r^2} =$$

$$= -\frac{qQ_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_A^C = \frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R}\right)$$

1.38. In desenul din problema precedentă în afara sarcinii Q_1 plasată în punctul O_1 se plasează o sarcină Q_2 în punctul

O_2. Să se calculeze lucrurile mecanice $W_{\widehat{AB}}$ şi $W_{\widehat{AC}}$.

R.: $$W'_{\widehat{AB}} = \int_A^B q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\,\vec{d\ell_1} =$$

$$= q\int_A^B \vec{E}_1\cdot\vec{d\ell_1} + q\int_A^B \vec{E}_2\cdot\vec{d\ell_1} = q\int_A^B E_1\cdot d\ell_1\cdot \cos\frac{\pi}{2} +$$

$$+ q\int_A^B E_2\cdot d\ell_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)$$

Deoarece: $E_2\cdot d\ell_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -E_2\cdot d\ell_1\cdot\sin\gamma$ şi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \frac{dr}{d\ell_1} \quad \text{sau} \quad dr = -d\ell_1\cdot\sin\gamma$$

rezultă: $-E_2\cdot d\ell_1\cdot\sin\gamma = E_2\,dr$. Deci:

$$W'_{\widehat{AB}} = 0 + q\int_A^B E_2\,dr = \frac{q\,Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} \quad \text{sau}$$

$$W'_{\widehat{AB}} = \frac{qQ_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2-\Delta R}\right). \quad \text{Analog :}$$

$$W'_{\widehat{AC}} = \int_A^C q\,\vec{E}_1\cdot\vec{d\ell_2} + \int_A^C q\,\vec{E}_2\cdot\vec{d\ell_2} = q\int_A^C \vec{E}_1\cdot\vec{d\ell_2} +$$

$$+ q\int_A^C E_2\cdot d\ell_2\cdot\cos\frac{\pi}{2} = W_{\widehat{AC}} + 0. \quad \text{Deci:}$$

$$W'_{\widehat{AC}} = W_{\widehat{AC}}$$

<u>1.39</u>. Folosind conceptul de potenţial să se rezolve problemele 1.37 şi 1.38.

R.: $$W_{\widehat{AB}} = q(V_A - V_B) = q\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\right) = 0$$

$$W_{\widehat{AC}} = q(V_A - V_C) = q\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(R_1+\Delta R)}\right] =$$

$$= \frac{qQ_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+\Delta R}\right)$$

$$W'_{\widehat{AB}} = q(V'_A - V'_B) = q\left[\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_1} - \right.$$

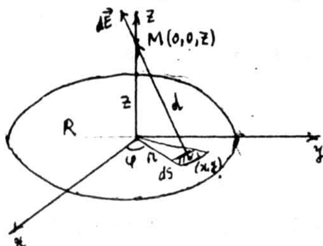
$$\left. - \frac{Q_2}{4\pi\cdot\varepsilon_0(R_2-\Delta R)}\right] = \frac{qQ_2}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2-\Delta R}\right)$$

$$W'_{\widehat{AC}} = q(V'_A - V'_C) = q\left(\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0(R_1+\Delta R)} - \frac{Q_2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R_2}\right) =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+\Delta R}\right) = W_{\widehat{AC}}$$

<u>1.40</u>. Să se calculeze vectorul cîmp electric pe normala plasată în centrul unui disc de rază R pe care este repartizată uniform o sarcină Q. Să se particularizeze rezultatul în cazul distanţelor mari şi mici în raport cu R.



<u>R</u>.: Fie un element de suprafaţă dS al discului scris în coordonate polare plane r şi φ: dS = r·dr·dφ .

Sarcina elementară dQ conţinută în elementul de suprafaţă dS va crea în punctul M arbitrar de pe axa Oz şi aflat la distanţa $d = \sqrt{r^2+z^2}$ de elementul de suprafaţă dS, vectorul cîmp elementar $\vec{dE}$

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{d^2}\cdot\frac{\vec{d}}{d} \quad \text{în care}$$

$$\vec{d} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k} = -r.\cos\varphi.\vec{i} - r.\sin\varphi\cdot\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$dQ = \frac{Q.dS}{\pi R^2} = \frac{Q.r.dr.d\varphi}{\pi R^2} \quad . \quad \text{Deci}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(-r.\cos\varphi\,\vec{i} - r.\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k})d\varphi$$

$$\text{Deoarece} \quad -\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi = -\int_0^{2\pi}\sin\varphi.\,d\varphi = 0 \quad \text{şi}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\vec{E} = \frac{Q\cdot z}{2\pi\cdot \varepsilon_0 R^2}\vec{k}\cdot\int_0^R \frac{r\cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{Q\cdot z}{4\pi\cdot \varepsilon_0 R^2}\vec{k}\int_0^R \frac{d(r^2+z^2)}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

După efectuarea ultimei integrale $\Rightarrow$

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}$$

Vectorul cîmp electric $\vec{E}$ este dirijat de-a lungul axei Oz şi are modulul

$$E(z) = E_z = \frac{Q}{2\pi\cdot \varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \qquad (1)$$

Vectorul $\vec{E}$ şi mărimea lui E depind de coordonata z.

Modulul (mărimea) lui $\vec{E}$ în centrul discului (z=0) are valoarea

$$E(z=0) = \frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon_0 R^2}$$

Pentru a calcula valoarea modulului lui $\vec{E}$ la distanţe mari de disc ($z \to \infty$) facem următoarea aproximaţie:

$$\frac{1}{\sqrt{(z^2+R^2)}} = \frac{1}{z\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2}} \simeq \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]$$

Inlocuind acest rezultat în formula (1) $\Rightarrow$

$$E(z\to\infty) \cong \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 z^2}$$

1.41. Să se calculeze mărimea potenţial electric V(z) în cazul problemei precedente. Să se particularizeze pentru cazurile $z \to 0$ şi $z \to \infty$.

R.: In punctul M sarcina dQ va crea potenţialul elementar

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0 d} \qquad \text{în care} \qquad d = \sqrt{z^2 + r^2}$$

şi $\quad dQ = \frac{Q \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{\pi R^2}$. Deci:

$$V(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \frac{r}{4\pi^2 \cdot \varepsilon_0 \sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V(z) = \frac{2\pi Q}{4\pi^2 \cdot \varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{d(\frac{r^2}{2})}{\sqrt{z^2+r^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{d(r^2+z^2)}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 R^2} 2(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^R =$$

$$= \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right)$$

Potenţialul V(z) în z = o are valoarea $V(z=o) = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 R}$.

Pentru $z \to \infty$ utilizăm dezvoltarea din problema precedentă

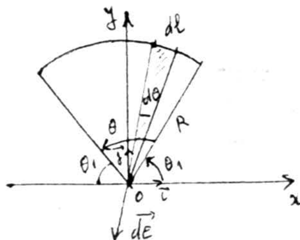
$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{z\sqrt{1 + (\frac{R}{z})^2}} \simeq \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right] \quad \text{şi}$$

$$\sqrt{z^2+R^2} \cong z\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{z^2}\right) \quad \text{şi deci}$$

$$V(z \to \infty) = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 R^2} \left(\not{z} + \frac{z}{2} \frac{R^2}{z^2} - \not{z} \right) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 z}$$

1.42. O bară subţire neconductoare de lungime l avînd forma unui arc de cerc de rază R este încărcată cu sarcina Q distribuită uniform. Să se găsească expresia vectorului cîmp electric $\vec{E}$ şi potenţialul electric în centrul cercului din care face parte bara.

R.: Fie un element de lungime dl care conţine sarcina elementară dQ. Sarcina dQ creează în punctul O vectorul cîmp electric elementar $\vec{dE}$ şi un potenţial elementar dV. Se poate scrie



$$dl = R \cdot d\theta \quad \text{şi} \quad \vec{dE} = \frac{dQ}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

cu $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cdot\cos\theta.\vec{i} + R\cdot\sin\theta.\vec{j}$. Deci

$$\int d\vec{E} = \vec{E} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^3}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta}\frac{Q.d\ell}{\ell}\cdot(R.\cos\theta.\vec{i} + R.\sin\theta.\vec{j})$$

în care $dQ = \frac{Q.d\ell}{\ell}$.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\ell R}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta}(\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j})\cdot d\theta$$

Deoarece $\theta = \pi - 2\,\theta_1$ rezultă

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta}\cos\theta.d\theta = \sin\theta\Big|_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} = \sin(\pi-\theta_1) - \sin\theta_1 = 0 \quad \text{şi}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta}\sin\theta.d\theta = -\cos\theta\Big|_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} = 2\cdot\cos\theta_1 = 2\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

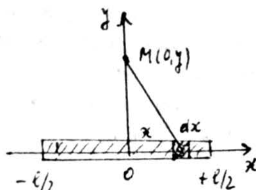
Deoarece $\ell = R.\theta \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\cdot\varepsilon_0}\;\frac{1}{\ell\cdot R}\sin\frac{\ell}{2R}\vec{j}$$

Potenţialul electric în punctul O este

$$V = \int dV = \int\frac{dQ}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R}\int dQ = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 R}$$

1.43. Fie o bară subţire de lungime ℓ încărcată uniform cu o sarcină Q şi cu densitate liniară de sarcină λ. Să se afle expresia potenţialului într-un punct situat pe mediatoarea barei de coordonate cunoscute.



R.: Pentru elementul de lungime dx, care conţine sarcina elementară $dQ = \lambda dx$ putem scrie

$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\cdot\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}$$

Prin integrare rezultă:

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ . Notăm } I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pentru a găsi primitiva funcției $1/\sqrt{x^2+y^2}$ facem substituția Euler: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$ $(a > 0)$.

In cazul nostru, $a = 1$, $b = 0$, $c = y^2$. Deci

$$\sqrt{x^2+y^2} = t-x \text{ . Rezultă } x = \frac{t^2-y^2}{2t} \text{ și } dx = \frac{t^2+y^2}{2t^2}\,dt$$

Calculăm acum radicalul

$$\sqrt{x^2+y^2} = t-x = t - \frac{t^2-y^2}{2t} = \frac{t^2+y^2}{2t} \text{ . Deci}$$

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}).$$

Deci:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{\ell}{2}+\sqrt{\ell^2/4+y^2}}{-\frac{\ell}{2}+\sqrt{\ell^2/4+y^2}}$$

(y este dat)

1.44. Să se determine expresia potențialului electric într-un punct arbitrar situat în interiorul sau exteriorul unui strat sferic de rază R, uniform încărcat cu densitatea de sarcină electrică de suprafață σ.

R.: Mărimea V(r) se calculează aplicînd formula

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Dacă convenim ca $V(\infty) = 0$ și recurgînd la expresiile lui $\vec{E}$ în cazul unui strat sferic încărcat de rază R dată

$$\vec{E}_e = \frac{Q_i}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \text{ în care } Q_i = 4\pi R^2\sigma \text{ și } \vec{E}_i = 0$$

(v.problema 1.24) rezultă pentru un punct din interiorul sferei $(r < R)$.

$$V_i = -\int_{\infty}^{r<R} \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_e\cdot\vec{dr} - \int_{R}^{r} \vec{E}_i\cdot\vec{dr} =$$

$$= -\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{\vec{r}\cdot\vec{dr}}{r^3}$$

Ultima integrală este egală cu zero, deoarece $E_i = 0$.

Deoarece $\vec{r}\cdot\vec{dr} = r\cdot dr\cdot\cos 0^0 = r\cdot dr$ şi

$$\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{R} = -\frac{1}{R}$$ rezultă că

$$V_i(r) = \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R} =$$ constant, oricare ar fi punctul ales

în interiorul stratului sferic ($r \leq R$).

Să calculăm expresia potenţialului $V_e(r)$ într-un punct situat în exteriorul stratului sferic ($r > R$).

$$V_e(r) = -\int_{\infty}^{r>R}\vec{E}_e\cdot\vec{dr} = -\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int_{\infty}^{r>R}\frac{\vec{r}\cdot\vec{dr}}{r^3} =$$

$$= -\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r>R}\frac{dr}{r^2} = +\frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Deci potenţialul $V_e(r) = \frac{Q_1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$ în exteriorul stratului sferic descreşte invers proporţional cu distanţa de la centrul sferei la punctul considerat ($r > R$).

1.45. Să se determine vectorul cîmp electric în interiorul şi exteriorul unei sfere pline de rază R dată, de permitivitate $\varepsilon_r = 1$, uniform încărcată în volum cu o sarcină Q şi densitate de sarcină volumică ρ.

R.: Fie un punct situat în interiorul sferei de rază R şi o gaussiană de forma unei suprafeţe sferice de rază $r < R$ trecînd prin punctul dat. Scriem legea (teorema) Gauss în acest caz.

$$\oint_{S_i} \vec{E_i} \cdot \vec{dS_i} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Q_i = sarcina care se află în interiorul suprafeței sferice S de rază r < R. Deoarece problema are simetrie sferică, în orice punct situat pe sfera de rază r, vectorul cîmp electric $\vec{E_i}$ are același modul (valoare) E_i și orientare radială. Deci:

$$\oint_{S_i} \vec{E_i} \cdot \vec{dS_i} = \oint_{S_i} \vec{E_i} \cdot \vec{n} \cdot dS_i = \oint_{S_i} E_i \cdot dS_i = E_i \oint_{S_i} dS_i =$$

$$= E_i \cdot S_i = E_i \cdot 4\pi r^2$$

(am utilizat faptul că E în orice punct de pe suprafața S de rază r, $|\vec{E_i}| \equiv E_i$ este constant și poate fi scos, deci, de sub integrală și faptul că $\vec{E_i} \cdot \vec{n} = E_i \cdot \cos 0^0 = E_i$, $\vec{n}$ este versorul vectorului cîmp $\vec{E_i}$. Deci, în virtutea teoremei Gauss rezultă

$$E_i = \frac{Q_i}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \text{sau vectorial} \quad \vec{E_i} = \frac{Q_i}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Valoarea lui Q_i se poate calcula în funcție de ρ dat. Intr-adevăr,

$$\rho = \frac{Q_i}{V_i} = \frac{Q_i}{\frac{4\pi r^3}{3}} \quad \text{rezultă}$$

$$\boxed{E_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r} \quad \text{sau vectorial} \quad \vec{E_i} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$$

Deoarece $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3}$ mai putem scrie

$$\vec{E_i} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}, \quad Q = \text{sarcina totală.}$$

Rezultă că E_i crește liniar cu distanța r de la centru la punctul dat. Vom proceda analog pentru un punct situat în exteriorul sferei încărcate. Vom duce o suprafață S_e sferică de rază r > R prin punctul dat concentric cu sfera de rază dată R.

Sarcina Q_i are în acest caz expresia:

$$Q_i = Q = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$$

Legea Gauss se scrie în acest caz

$$\oint_{S_e} \vec{E}_e \cdot \vec{dS}_e = E_e \cdot 4\pi r_e^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (r > R)$$

Sau: $\boxed{E_e = \frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}}$ și

$$\vec{E}_e = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

1.46. Să se calculeze expresiile pentru potențialul electric în cazul problemei precedente într-un punct situat în interiorul sau exteriorul sferei încărcate.

R.: Vom utiliza formula

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

în care se consideră $V(\infty) = 0$, iar vectorul cîmp electric $\vec{E}$ se ia din problema precedentă.

Deci,

$$V_i(r) = -\int_{\infty}^{r<R} \vec{E} \cdot \vec{dr} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_e \cdot \vec{dr} - \int_{R}^{r} \vec{E}_i \cdot \vec{dr} =$$

$$= -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left[\int_{\infty}^{R} \frac{\vec{r} \cdot \vec{dr}}{r^3} + \frac{1}{R^3} \int_{R}^{r} \vec{r} \cdot \vec{dr} \right] =$$

$$= -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left[\int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{R^3} \int_{R}^{r} r \cdot dr \right].$$

După efectuarea integralelor rezultă expresia

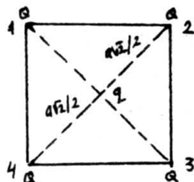
$$V_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$$

Pentru un punct situat în exteriorul sferei putem scrie

$$V_e(r) = - \int_{\infty}^{r>R} \vec{E}_e \cdot \vec{dr} = - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{\vec{r}\cdot\vec{dr}}{r^3} = - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} .$$

Deci $V_e(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ $(r>R)$ descrește invers proporțional cu distanța r.

1.47. Fie un pătrat cu latura a, care are în colțurile sale plasate sarcini identice Q. Ce valoare are sarcina q, care plasată în centrul pătratului face ca energia potențială electrostatică a sistemului să fie minimă.



R.: Energia potențială electrostatică E_p totală a sistemului este egală cu suma

$$E_p = E_p(1,2) + E_p(1,3) + E_p(1,4) + E_p(2,3) + E_p(2,4) + E_p(3,4) + E_p(1,5) + E_p(2,5) + E_p(3,5) + E_p(4,5)$$

Putem scrie

$$E_p(1,2) = E_p(2,3) = E_p(1,4) = E_p(3,4) = \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a}$$

$$E_p(1,3) = E_p(2,4) = \frac{Q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a\sqrt{2}}$$

$$E_p(1,5) = E_p(2,5) = E_p(3,5) = E_p(4,5) = \frac{2\,Qq}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a\sqrt{2}}$$

Deci,

$$E_p = \frac{Q}{4\pi\cdot\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\,(4\,Q\sqrt{2} + 2\,Q + 8\,q) =$$

$$= \frac{Q}{2\sqrt{2}\,\pi\cdot\varepsilon_0 a}\left[(2\sqrt{2}+1)Q + 4\,q\right] \Rightarrow \text{că } E_p = 0$$

pentru

$$q = - \frac{2\sqrt{2}+1}{4}\,Q$$

1.48. Fie o repartiție uniformă Q cu simetrie sferică de rază R și de densitate volumică de sarcină ρ . Să se calculeze energia cîmpului electrostatic determinat de această repartiție.

R.:Formula densității de energie volumice de tip electro-

static este

$$w_e = \frac{dW}{dV} \quad \text{(energia unității de volum)}$$

şi este egală cu

$$\frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_i^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E_e^2 \qquad (1)$$

în care

$$E_i = \frac{\rho r}{3 \cdot \varepsilon_0} \quad \text{şi} \quad E_e = \frac{\rho R^3}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \qquad (2)$$

reprezintă mărimile vectorului cîmp electric $\vec{E}$ într-un punct situat în interiorul sau exteriorul sferei încărcate electric (v. problema 1.45).

Inmulţind (1) cu elementul de volum dV şi integrînd rezultă

$$\int_V \frac{dW}{dV} dV = \int_V dW = W = \int_V \frac{\varepsilon_0 E_i^2}{2} dV + \int_V \frac{\varepsilon_0 E_e^2}{2} dV$$

Tinînd cont de faptul că elementul de volum dV în coordonate sferice are expresia $dV = r^2 dr \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ şi că $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ în care V = volumul sferei $= \frac{4\pi}{3} R^3$ şi relaţiile (3) $\Rightarrow$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\rho^2}{9 \varepsilon_0^2} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^4 \, dr + \right.$$

$$\left. + R^6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_R^{\infty} \frac{r^2 dr}{r^4} \right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{18 \varepsilon_0} \left[4\pi \frac{R^5}{5} + 4\pi R^5 \right] = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{18 \varepsilon_0} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15 \varepsilon_0}$$

Utilizînd $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow$ $\boxed{W = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}}$

1.49. Să se calculeze de cîte ori este mai mică energia cîmpului electrostatic atunci cînd sarcina Q este repartizată pe o suprafață sferică de rază R (strat sferic) față de cazul în care aceeași sarcină este repartizată uniform în interiorul unei sfere de aceeași rază R.

R.: Pornim de la formula din problema precedentă

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 E_i^2}{2} dV + \int_V \frac{\varepsilon_0 E_e^2}{2} dV$$

în care E_i și E_e sînt modulele vectorului cîmp electric $\vec{E}$ în interiorul sferei și în exteriorul acesteia. In cazul unei sfere pline (v.problema 1.48) am obținut expresia

$$W = \frac{4\pi R^5 \cdot \rho^2}{15 \cdot \varepsilon_0}$$

In cazul unui strat sferic putem scrie (v.problema 1.24)

$$E_i = 0 \qquad \text{și} \qquad E_e = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\rho . R^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Formula (1) conduce la

$$W_1 = 0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{\rho^2}{9\,\varepsilon_0^2} \cdot R^6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta . d\theta \int_R^{\infty} \frac{r^2 dr}{r^4} \Rightarrow$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{R^5 \cdot \rho^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow W^0 / W_1 = \frac{6}{5} = 1,2 .$$

1.50. Să se calculeze circulația vectorului cîmp electric $\vec{E} = 4\,xy\,\vec{i} + 2\,x^2\vec{j}$, de-a lungul drumurilor indicate pe figură.

a) direct pe segmentul OB;

b) pe segmentul OA și apoi pe segmentul AB;

c) pe segmentul OC și apoi CB.

R.: a) Circulația vectorului $\vec{E}$ de-a lungul unei curbe Γ se scrie

$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{dl} .$$

Deci

Cda 265/1991 Fasc. 4

$$\mathcal{C}_{\widehat{OB}} = \int_0^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_0^B (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy)$$

Ecuaţia dreptei (OB) este $y = \frac{y_1}{x_1} x \Rightarrow dy = \frac{y_1}{x_1} dx$.

Deci

$$\mathcal{C}_{\widehat{OB}} = \int_0^{x_1} 4\cdot\frac{y_1}{x_1}\cdot x^2 dx + \int_0^{x_1} 2\cdot x^2 \cdot \frac{y_1}{x_1}\cdot dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot y_1 x_1^2 + \frac{2}{3}\cdot x_1^2 y_1 = 2\cdot x_1^2 y_1$$

b) Axa Ox are ecuaţiile $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ ceea ce conduce la

$$\mathcal{C}_{\widehat{OA}} = \int_0^A (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy) = \int_0^{x_1} E_x \cdot dx = 0$$

($E_x = 4\cdot xy$. Deoarece pe OA, $y = 0 \Rightarrow E_x = 0$)

Ecuaţia dreptei (AB) este $x = x_1 \Rightarrow dx = 0$ şi

$E_y(x=x_1) = 2\, x_1^2$; deci $E_x \cdot dx + E_y \cdot dy = 0 + 2\cdot x_1^2 \cdot dy$

$$\mathcal{C}_{\widehat{AB}} = \int_0^{y_1} 2\cdot x_1^2 \cdot dy = 2\cdot x_1^2 \cdot y_1 = \mathcal{C}_{\widehat{OAB}}$$

c) Ecuaţia dreptei (OC) este $x = 0$, iar în orice punct de pe aceasta $E_y(x=0) = 0$, ($E_y = 2\cdot x^2$) putem scrie

$$\mathcal{C}_{\widehat{OC}} = \int_0^{y_1} E_y \cdot dy = 0$$

Ecuaţia dreptei (CB) este $y = y_1 \Rightarrow dy = 0$ şi $E_x = 4\cdot xy$ calculat în fiecare punct $y = y_1$ se scrie $E_x = 4\cdot xy_1$. Deci:

$$\mathcal{C}_{\widehat{CB}} = \int_0^{x_1} E_x \cdot dx = 4\cdot y_1 \int_0^{x_1} x\cdot dx = 2\, y_1 x_1^2 = \mathcal{C}_{\widehat{OCB}}$$

Concluzie: $\mathcal{C}_{\widehat{OCB}} = \mathcal{C}_{\widehat{AB}} = \mathcal{C}_{\widehat{OAB}} = 2\, x_1^2 \cdot y_1$. Cu alte cu-

vinte lucrul mecanic al vectorului cîmp electric $\vec{E}$ nu depinde de forma drumului.

1.51. In problema precedentă circulaţia vectorului cîmp electric $\vec{E}$ nu depinde de forma drumului pe care aceasta se calculează. Rezultă, deci, că vectorul $\vec{E}$ este conservativ şi deci derivă dintr-un potenţial $V(x,y)$. Să se găsească expresia acestuia.

R.: $\vec{E}$ fiind un vector conservativ, există o funcţie $V(x,y)$, astfel încît $\vec{E} = -\text{grad } V(x,y)$. Din relaţia

$$4\,xy\,\vec{i} + 2\,x^2\vec{j} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} \quad \text{sau}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = 2\,x^2 \qquad \text{şi} \qquad -\frac{\partial V}{\partial x} = 4\,xy\,.$$

Din prima ecuaţie $\Rightarrow$ $V(x,y) = -\,2.x^2.y + F(x)$

Funcţia $F(x)$ se determină din condiţia

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\,(-4.x\cdot y + \frac{dF}{dx}) = 4.xy \Rightarrow \frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \text{const.} = V_0$$

Deci, $\quad V(x,y) = -\,2.x^2.y + V_0$

1.52. Se dă o sferă de rază R în interiorul căreia vectorul cîmp electric $\vec{E}$ are expresia

$$\vec{E} = (2\,x+y)\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

Să se calculeze tensiunea electrică între punctele $A(1,5;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 1)$ şi $B(3;\ \sqrt{3}\ ;\ 2)$.

R.: Vectorul $\vec{E}$ fiind conservativ, derivă dintr-un potenţial V definit astfel $\vec{E} = -\text{grad } V(x,y,z)$. Deci

$$(2.x+y)\,\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j} + 3.\vec{k} = -\,(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -(2\cdot x+y) \quad (1)\ , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -(x+y) \quad (2)\ , \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -3 \ (3)$$

Din ecuaţia $\frac{\partial V}{\partial z} = -3$, rezultă că potenţialul $V(x,y,z)$ are forma (A) $V(x,y,z) = -3\cdot z + F(x,y)$. Funcţia F nu depinde de z (integrarea s-a făcut în raport cu z!) şi forma acesteia re-

zultă din ecuaţia (2):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = -(x+y) \Rightarrow$$ prin integrare în raport

cu y (x se consideră constant).

$$F(x,y) = -\left(xy + \frac{y^2}{2}\right) + g(x)\,.$$

Constanta de integrare este funcţie de variabila x, dar nu depinde de variabila y de integrare.

Inlocuim F(x,y) în ecuaţia (A) $\Rightarrow$

$$(B) \quad V(x,y,z) = -3z - \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) + g(x)\,.$$

Funcţia g(x) se obţine înlocuind (B) în (1)

$\frac{\partial V}{\partial x} = -y + \frac{\partial g}{\partial x} = -2 \cdot x - y$. Prin integrare în raport cu $x \Rightarrow g(x) = -x^2 + C$. Constanta C = constanta de integrare. In concluzie

$$V(x,y,z) = -\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + 3z\right) + C$$

Diferenţa de potenţial (tensiunea) dintre punctele A, B este, deci

$$U = V_A - V_B = x_B^2 + x_B y_B + \frac{y_B^2}{2} + 3\,z_B - x_A^2 - x_A y_A - \frac{y_A^2}{2} - 3\,z_A = 11,7 \text{ volţi}$$

1.53. Un milion de picături de mercur, avînd fiecare raza egală cu $r = 9 \cdot 10^{-5}$ m şi sarcina electrică $q = 10^{-12}$ C se unesc, formînd o singură picătură. Să se calculeze:

a) Potenţialul V_1 al fiecărei picături înainte de unire.

b) Potenţialul V_2 al picăturii formate prin unire.

R.: a) Potenţialul V_1 al oricărui punct aparţinînd unei picături sferice de rază r este constant şi are expresia $V_1 = q/4\pi\,\varepsilon_0 r$. Valoarea lui V_1 este $V_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}/9 \cdot 10^{-5} = 100$ Volţi.

b) Expresia lui V_2 este analog $V_2 = Q/4\pi \cdot \varepsilon_0 R$, în care Q este sarcina picăturii mari, $Q = nq$, $n = 10^6$, iar R este raza picăturii mari.

Deoarece volumul picăturii mari trebuie să fie egal cu suma volumelor celor n picături rezultă $4\pi/3 \cdot R^3 = n \cdot 4 \cdot \pi/3 \cdot r^3$ $\Rightarrow R = r \cdot n^{1/3}$.

Deci $V_2 = nq/4\pi \cdot \varepsilon_0 n^{1/3} r = n^{2/3} \cdot q/4\pi \cdot \varepsilon_0 r = n^{2/3} V_1 =$

$= (10^6)^{2/3}\, 100 = 10^6$ Volţi

<u>1.54</u>. Două sarcini electrice punctiforme $+q$ şi $-q'$ se află la distanţa „a" una de cealaltă. Fie dreapta care trece prin cele două sarcini.

a) Să se găsească un punct de pe această dreaptă cu proprietatea că suprafaţa unei sfere de rază R avînd ca centru acest punct, să fie de potenţial zero.

b) In cazul a) care este relaţia dintre mărimile R, q, q' şi a?

<u>R</u>.: Fie un punct M al suprafeţei sferice cu proprietatea cerută $V_M = 0$. Potenţialul V_M este determinat de sarcinile q şi $-q'$ şi este egal cu $V_M = \dfrac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r} - \dfrac{q'}{4\pi\, \varepsilon_0 r'} = 0$, r şi r' fiind distanţele de la sarcini la punctul dat M. Rezultă (1) $r'/r = q'/q$.

Notînd AB = a, BC = b putem scrie teorema cosinusului în cele 2 triunghiuri (v.figura).

$$(2) \qquad \begin{aligned} R^2 &= r^2 + (a+b) - 2(a+b) \cdot r \cdot \cos\alpha \\ r'^2 &= r^2 + a^2 - 2 \cdot ar \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Ţinînd seama de relaţia (1), eliminînd $\cos\alpha$ în (2) rezultă

$$(3) \qquad R^2 = \left(1 + \frac{a+b}{a} \cdot \frac{q'^2 - q^2}{q^2}\right) r^2 + b(a+b)$$

Această egalitate în care R este raza sferei şi care trebuie să rămînă constantă oricare ar fi r cu proprietatea (1), este satisfăcută numai în cazul în care coeficientul lui r^2 se anulează (în caz contrar R nu este constant pentru a, b date).

Rezultă (4) $b = q'^2 \cdot a/(q^2 - q'^2)$.

<u>Observaţie</u>: Problema nu are soluţie dacă $q \neq q'$.

b) Din relaţiile (3) şi (4) rezultă $R = \sqrt{b(a+b)} =$

$= qq'a/(q^2-q'^2)$.

1.55. Fie o sarcină punctiformă fixă +Q şi sarcina punctiformă +q aflată la distanţa x_o de sarcina +Q. Sarcina +q se pune în mişcare la un moment dat t = 0 cu viteză iniţială egală cu zero, sub acţiunea forţei coulombiene dintre q şi Q.

a) Pe baza legii conservării energiei totale, să se găsească expresia vitezei lui q la distanţa x oarecare $x > x_o$ de Q.

b) Momentul t la care q se va găsi la depărtarea x de Q.

R.: a) Legea conservării energiei scrisă pentru sistemul considerat este

$$E_{total}(t=0) = E_{cin} + E_{pot}\text{, în care } E_{cin}(t=0) = 0$$

iar $E_{pot}(t=0) = qQ/4\pi\varepsilon_o x_o$. La momentul t

$$E_{total}(t) = \frac{mv^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_o x}$$ (forţa de greutate nu se ia în consideraţie fiind neglijabilă).

Deci din $E_{total}(t=0) = E_{total}(t) \Longrightarrow$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{x_o} - \frac{1}{x}\right) \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_o x_o m}}\sqrt{\frac{x-x_o}{x}}$$

cu $x \geqslant x_o$. Notez $\alpha = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_o x_o m}}$.

b) Deoarece $v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \alpha\sqrt{\frac{x-x_o}{x}} = v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow$

$$\alpha\cdot dt = \sqrt{\frac{x}{x-x_o}}\,dx \Longrightarrow \alpha t = \int_{x_o}^{x}\sqrt{\frac{x}{x-x_o}}\,dx .$$

Făcînd schimbarea de variabilă $y = \sqrt{\frac{x}{x-x_o}}$. Rezultă

$x = x_o y^2/(y^2-1)$, $dx = -2\,x_o y/(y^2-1)^2 dy$. Deci,

$$\alpha\cdot t = 2\,x_o\cdot\int_{\sqrt{x/(x-x_o)}}^{\infty}\frac{y^2\cdot dy}{(y^2-1)^2}$$

Însă

$$\int\frac{y^2dy}{(y^2-1)^2}=\int\frac{dy}{y^2-1}+\int\frac{dy}{(y^2-1)^2}$$

Integrînd prin părţi rezultă

$$\int\frac{dy}{(y^2-1)^2}=-\frac{y}{2(y^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2-1}\;.$$

Prin descompunere în fracţii simple $\Longrightarrow$

$$\int\frac{dy}{y^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{y-1}{y+1}+C$$

Prin urmare putem scrie

$$\alpha\cdot t=x_o\left[\frac{1}{2}\ln\frac{y-1}{y+1}-\frac{y}{y^2-1}\right]\Bigg|_{x/(x-x_o)}^{\infty}\Longrightarrow$$

$$t=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{x(x-x_o)}+\frac{x_o}{2}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-x_o}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-x_o}}\right]$$

1.56. Fie 2 sarcini electrice pozitive, identice Q situate la distanţa 2a una de cealaltă. La distanţa x_o faţă de jumătatea distanţei dintre ele la momentul t = 0 se aşează pe segmentul dintre ele cu viteză nulă o sarcină electrică pozitivă q avînd masa m. Să se calculeze perioada oscilaţiilor sarcinii q, în ipoteza oscilaţiilor mici ($|x_o|\ll a$).

R.: Legea conservării energiei pentru mişcarea sarcinii q se scrie astfel (v.figura):

Q Q
-a 0 x_o +a x

$$\frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_o(a-x_o)}+\frac{qQ}{4\pi\cdot\varepsilon_o(a+x_o)}=$$

$$=\frac{mv^2}{2}+\frac{Qq}{4\pi.\varepsilon_o(a-x)}+\frac{Qq}{4\pi\cdot\varepsilon_o(a+x)}$$

Un calcul simplu conduce la expresia

$$v^2=\frac{a.q.Q}{\pi\varepsilon_o m(a^2-x_o^2)}\cdot\frac{x_o^2-x^2}{a^2-x^2}\qquad(1)$$

Dacă notăm constanta $\sqrt{\dfrac{a\cdot q\cdot Q}{\pi\cdot\varepsilon_o m(a^2-x_o^2)}}=\alpha$ şi ţinînd

cont de faptul că:

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow (2) \quad dt = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x_0^2-x^2}}\,dx$$

Examinînd ecuaţia (1) în care v^2 este o mărime pozitivă se observă că este necesar ca $x \in [-x_0, x_0]$, care reprezintă domeniul mişcării sarcinii q. x_0 reprezintă amplitudinea oscilaţiilor lui q în jurul punctului O. Perioada T a oscilaţiilor este, prin definiţie, durata unei oscilaţii complete (dublul duratei mişcării lui q de la $-x_0$ la x_0). Deci, integrînd (2) rezultă

$$\int_0^T dt = \frac{2}{\alpha}\int_{-x_0}^{x_0}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x_0^2-x^2}}\,dx = \frac{4}{\alpha}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x_0^2-x^2}}\,dx .$$

Deci

$$T = \frac{4}{\alpha}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x_0^2-x^2}}\,dx = \frac{4a}{\alpha}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1-(\frac{x}{a})^2}{x_0^2-x^2}}\,dx$$

Deoarece, prin ipoteză $|x_0| \ll a$ şi avînd în vedere că $x \in [-x_0, x_0]$ rezultă $(\frac{x}{a})^2 \ll 1$. Acest lucru implică

$$1-(x/a)^2 \simeq 1 \Longrightarrow$$

$$T = \frac{4a}{\alpha}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}} = \frac{4a}{\alpha}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{4a}{\alpha}\arcsin u\Big|_0^1 = \frac{4a}{\alpha}(\arcsin 1 - \arcsin 0) =$$

$$= \frac{2\pi a}{\alpha} .$$

1.57. Patru sarcini electrice identice q se găsesc în vîrfurile unui pătrat cu latura a. Presupunem că sarcina q aflată în colţul 1 se poate mişca liber de-a lungul diagonalei 3-1 a pătratului sub acţiunea sarcinilor considerate fixe din vîrfurile 2,3,4. Să se calculeze viteza acestei sarcini la distanţa x = a de colţul 1, respectiv la distanţa $x \to \infty$.

R.: Legea conservării energiei ~~se scrie~~ referindu-ne la două poziţii: sarcina liberă se află în vîrful 1 şi apoi la

distanţa x de vîrful 1, se scrie:

$$E_{tot.}(1) = E_{tot.}(x) \qquad (1)$$

$$E_{tot.}(1) = \frac{2.q^2}{4\pi.\varepsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0(\sqrt{2}\,a)}$$

$$E_{tot.}(x) = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{2\,q^2}{4\pi\,.\varepsilon_0(x+\sqrt{2}\,a)}\,.$$

Din ecuaţia (1) rezultă expresia vitezei v

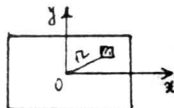
$$v = \frac{q}{\sqrt{2\pi\cdot\varepsilon_0 am}}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{2}}\right]^{1/2}$$

Purtînd în această formulă x = a şi apoi făcînd $x \to \infty$ se obţin cele 2 valori căutate ale vitezei.

$$v(a) = \frac{q}{\sqrt{2\pi.\,\varepsilon_0 am}}\left(\frac{5 + 2\sqrt{2} - 2\,.\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}\right)^{1/2} \quad \text{şi}$$

$$v(x\to\infty) = \sqrt{\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0 am}}\cdot q$$

<u>1.58</u>. Se consideră o placă dreptunghiulară de lungime 2 a şi lăţime 2 b, uniform încărcată electric cu densitatea superficială de sarcină σ . Să se găsească expresia potenţialului electric în centrul de masă al plăcii.



<u>R</u>.: Fie un element infinit mic de suprafaţă dS = dx·dy aparţinînd plăcii şi care conţine sarcina $dq = \sigma\,dx\cdot dy$, considerată punctiformă. Aceasta va crea în punctul 0 un potenţial elementar

$$dV = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{dq}{r}$$, iar potenţialul total creat de un sfert din placă se obţine printr-o integrală dublă

$$V_1(0) = \int dV_1 = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \iint_S \frac{dx \cdot dy}{r} = \frac{}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_0^b dy \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ultima integrală se face printr-o substituţie de tip Euler:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -x\sqrt{a} + t \quad , \quad (a > 0)$$

Aici $a = 1$, $b = 0$, $c = y^2$. Deci:

$$x = \frac{t^2-y^2}{2t} \quad \text{şi} \quad dx = \frac{t^2+y^2}{2t^2} \cdot dt \text{ , iar}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln (x + \sqrt{x^2+y^2})$$

Deci $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln \frac{(a + \sqrt{a^2+y^2})}{y}$. Rămîne de efectuat, în fine, integrala

$$I = \int_0^b dy \ln \frac{(a+ \sqrt{a^2+y^2})}{y} \text{ , care se face prin părţi:}$$

Notăm: $du = dy$, $v = \ln \frac{a+ \sqrt{a^2+y^2}}{y} \Rightarrow u = y$,

$$dv = - \frac{a.dy}{y\sqrt{a^2+y^2}}$$

Deci: $I = y \ln \frac{a+ \sqrt{a^2+y^2}}{y} \Big|_0^b + a \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}}$

Ultima integrală: $I_1 = \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \ln(y + \sqrt{a^2+y^2}) \Big|_0^b =$

$$= \ln(b+ \sqrt{a^2+b^2}) - \ln a = \ln \frac{b+ \sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Rezultatul pentru $V_1(0)$ este

$$V_1(0) = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \varepsilon_0} (a \ln \frac{b+ \sqrt{a^2+b^2}}{a} + b \ln \frac{a+ \sqrt{b^2+a^2}}{b})$$

Pentru întreaga placă $V(0) = 4\ V_1(0)$.

1.59. Spaţiul dintre plăcile unui condensator plan este uniform ocupat de un nor electronic a cărui densitate de volum este ρ . Pentru ce valoare a densităţii de sarcină ρ potenţialul şi cîmpul electric pe cealaltă placă sînt egale cu zero, dacă una dintre plăci este menţinută la potenţialul V_0 volţi, iar distanţa dintre plăci este d.

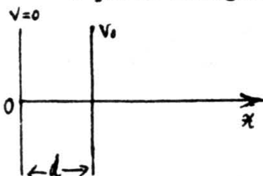
R.: Relaţia dintre densitatea de sarcină spaţială şi potenţialul V este dată de ecuaţia Poisson: $\Delta V(x,y,z) = -\rho/\varepsilon_0$. Explicitînd pe Δ rezultă

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\varepsilon_0$$

Dacă alegem axa Ox perpendiculară pe cele 2 plăci şi originea în O (v.figura), în acest caz potenţialul V va fi funcţie numai de x şi deci ecuaţia Poisson se scrie

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\rho/\varepsilon_0$$

O primă integrare conduce la $\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C_1$. Pe de



altă parte $E = -\frac{dV}{dx}$. Deoarece, prin ipoteză, pentru x = 0, E(x=0) = 0 rezultă valoarea constantei de integrare $C_1 = 0$.

Deci, $E = -\frac{dV}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$. După înmulţirea acestei ecuaţii cu dx printr-o nouă integrare

$$\int_0^d dV(x) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_0^d x\,dx \Rightarrow V(d) - V(o) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2.$$

Deoarece, prin ipoteză, V(o) = 0 şi $V(d) = V_0$, rezultă $\rho = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{d^2}$ (norul electronic fiind format din sarcini negative, densitatea ρ apare cu semnul minus).

1.60. Fie o distribuţie sferică de sarcină de rază R cu o densitate de volum constantă ρ . Să se determine expresia potenţialului în punctele situate în interiorul şi exteriorul acestei distribuţii sferice cu ajutorul ecuaţiei Poisson. Se presupune constantă expresia operatorului Laplace în coordonate sferice.

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

R.: Ecuaţia Poisson are forma (1) $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$. Avînd în vedere simetria sferică a problemei, potenţialul V va depinde numai de coordonata sferică r şi nu va depinde de coordonatele θ şi φ . Adică $\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$. In coordonate sferice, ecuaţia (1) devine $\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{dV(r)}{dr}\right) = -\rho/\varepsilon_0$. Fie un punct în interiorul sferei $(r < R)$. In acest caz, putem scrie

$$(2)\qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2$$

Inmulţind (2) cu dr şi integrînd în raport cu r rezultă

$$(3)\qquad r^2\cdot\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3}{3} + A$$

Constanta de integrare A se determină din ipoteza ca în centru potenţialul să aibă o valoare finită $V(0) = \text{const.}$

Prin urmare, pentru $r = 0$ din (3) rezultă $A = 0$. Ecuaţia (3) se scrie

$$(4)\qquad \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{3}\,.$$

Inmulţind (4) cu dr şi integrînd, rezultă

$V(r < R) = V_{int} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^2}{6} + B$, B = constantă de integrare

Intr-un punct situat în exteriorul sferei $(r > R)$ neexistînd sarcini electrice $\Rightarrow \rho = 0$ şi ecuaţia Poisson (2) se scrie:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \quad \text{de unde rezultă} \quad r^2 \frac{dV}{dr} = C \qquad (5)$$

Impărţind (5) cu r^2, înmulţind apoi cu dr şi integrînd rezultă:

$V(r > R) = V_{ext} = -\frac{C}{r} + D$, C şi D = constante de integrare. Constanta D se determină din condiţia ca pentru $r \to \infty$, $V(r \to \infty) = 0$

Rezultă D = 0 şi deci $V_{ext} = -\frac{C}{r}$. Constantele B şi C se determină din condiţiile de continuitate a potenţialului V(r) şi ale cîmpului electric $E = -\frac{dV}{dr}$ în orice punct de pe suprafaţa sferei (r = R). Cu alte cuvinte,

$$V_{int}(r=R) = V_{ext}(r=R) \quad \text{şi} \quad \frac{dV_{int}}{dr}(r=R) = \frac{dV_{ext}}{dr}(r=R)$$

Cele 2 condiţii se scriu

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + B = -\frac{C}{R} \quad \text{şi} \quad -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R}{3} = \frac{C}{R^2}$$

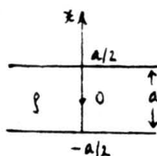
de unde rezultă

$$C = -\frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \varepsilon_0} \quad \text{şi} \quad B = \frac{\rho \cdot R^3}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

Deci

$$V_{int}(r) = -\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2 \cdot \varepsilon_0} \quad \text{şi} \quad V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \cdot \varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

1.61. Utilizînd ecuaţia lui Poisson să se găsească expresia potenţialului şi cîmpului electric produs de o sarcină electrică avînd o densitate de volum ρ = const. şi care ocupă un volum avînd forma unui strat plan infinit de grosime a.



R.: Stratul plan încărcat fiind infinit potenţialul V va depinde numai de coordonata x (v.figura), iar ecuaţia Poisson se scrie în acest caz

$$(1) \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pentru $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, este constant şi diferit de zero (v.figura).

Soluţia ecuaţiei (1) furnizează expresia potenţialului $V_{int} = V(|x| \leq \frac{a}{2})$. Aceasta se obţine prin integrarea ecuaţiei (1). Putem scrie:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Inmulţim cu dx $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)\cdot dx = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot dx \Rightarrow d\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot dx$$

$$\int d\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int dx \Rightarrow (1)\quad \frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + A \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dx}\cdot dx = dV = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot x\cdot dx + A\cdot dx \Rightarrow$$

$$\int dV = V(x) = -\frac{\rho}{2\cdot\varepsilon_0}x^2 + A\cdot x + B \qquad (2)$$

Expresiile cîmpului electric şi potenţialului sînt

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x - A\,,\quad V(x) = -\frac{\rho}{2\cdot\varepsilon_0}x^2 + Ax + B$$

A,B = constanta de integrare şi $|x| \leq \frac{a}{2}$.

Pentru $x \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, unde $\rho = 0$ ecuaţia Poisson se scrie $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0$.

Prin 2 integrări succesive rezultă:

$$\frac{dV}{dx} = C \quad \text{şi} \quad V(x) = C.x + D, \quad C, D = \text{constante}$$

Constantele A şi B se determină din condiţiile $V(x) = V(-x)$ şi $V(x=0) = 0$. Rezultă $A = B = 0$. Constantele C şi D se determină din condiţia de continuitate a funcţiei potenţial V(x) şi a derivatei sale de ordinul unu $\frac{dV}{dx}$ la frontiera stratului $x = \pm\frac{a}{2}$. De exemplu, pentru $x = +\frac{a}{2}$ putem scrie

$$(Cx + D)\Big|_{x=a/2} = -\ /2\varepsilon_0\ x^2\Big|_{x=a/2} \quad \text{şi} \quad C = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x\Big|_{x=a/2}$$

Rezultă $C = -\rho a/2\varepsilon_0$ şi $D = \rho a^2/8\varepsilon_0$.

In concluzie:

$$V_{int.}(x) = -\frac{\rho}{2\cdot\varepsilon_0}x^2, \quad E_{int.}(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x \quad \text{şi}$$

$$V_{ext.}(x) = -\frac{\rho a}{2\cdot\varepsilon_0}x + \frac{\rho a^2}{8\cdot\varepsilon_0}, \quad E_{ext.}(x) = \frac{\rho a}{2\cdot\varepsilon_0}$$

1.62. Spaţiul dintre două sfere concentrice metalice, de raze R_1 şi R_2 ($R_1 > R_2$) este ocupat de un mediu conductor avînd o conductivitate σ. Dacă între cele două sfere se stabileşte o diferenţă de potenţial constantă $V_2 - V_1$, se cere să se determine: a) intensitatea curentului care trece între ele; b) rezistenţa electrică a stratului.

R.: a) Dacă diferenţa de potenţial între cele două sfere este constantă, curentul electric care circulă între sfere va fi continuu (regim staţionar) şi deci putem scrie $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ (în spaţiul dintre cele 2 sfere nu există acumulare de sarcini). Să calculăm expresia cîmpului electric $\vec{E}$ într-un punct situat între cele 2 sfere situat la distanţa r de centrul sferelor. Aplicăm teorema Gauss relativ la gaussiana Σ de formă sferică de rază r dusă prin punctul M.

$$\int_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int.}}{\varepsilon_0}$$

Deoarece $\vec{E}$ este constant în orice punct care aparţine suprafeţei Σ (simetrie sferică) şi $\vec{E}\cdot\vec{dS} = E\cdot dS \Rightarrow$

$$E\int dS = E\cdot S = E\cdot 4\pi r^2 = Q_{int.}/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$E_M = \frac{Q_{int.}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{A}{r^2}, \quad A = \frac{Q_{int.}}{4\pi\cdot\varepsilon_0},$$

$Q_{int.}$ = sarcina din interiorul suprafeţei .

Potenţialul în punctul M, V_M este dat de relaţia

$$\vec{E}_M = -\operatorname{grad} V = -\frac{dV}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{sau}$$

$$E_M = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E\cdot dr = -\frac{A}{r^2}dr \Rightarrow$$

$$V_M = \int dV = \frac{A}{r} + B\ .$$

Diferența de potențial $V_2 - V_1 = A(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$ și intensitatea curentului care trece prin cele 2 sfere este $I = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{j}\cdot\vec{dS}$ în care densitatea de curent în punctul M are expresia $j_M =$
$= \sigma E_M = \sigma .A/r^2$. Deci,

$$I = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\sigma A}{r^2} dS = \frac{\sigma \cdot A}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi .\sigma .A \quad (\vec{j} = \sigma \vec{E} \text{ și } \vec{j}\cdot\vec{dS} =$$

$$= \sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \sigma \vec{E}.\vec{n}.dS = \sigma E\, dS, \quad \vec{E}\cdot\vec{n} = E\cdot 1\cdot \cos(\vec{n}, \vec{E}) =$$

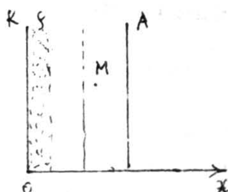
$= E.\cos 0 = E$, $\vec{E} \parallel \vec{n}$, $\vec{n}$ = versorul dus perpendicular pe elementul de suprafață dS aparținînd suprafeței Σ).

b) Rezistența electrică a stratului dintre cele 2 sfere este

$$R = (V_2 - V_1)/I = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

<u>1.63</u>. Să se calculeze expresia densității de curent electric care trece în vid, între 2 electrozi plani între care s-a aplicat o diferență de potențial U, astfel încît intensitatea curentului este mică. Ipoteze de calcul: a) electronii părăsesc catodul cu viteză nulă; b) în jurul catodului electronii alcătuiesc o sarcină de densitate ρ ; c) cîmpul electric la suprafața catodului este zero. L = distanța catod-anod.

<u>R</u>.: Deoarece, prin ipoteză, sarcina electrică este distribuită uniform în orice plan P (v.figura), paralel cu catodul K și care se află între catod și anod (A), funcția potențial V nu depinde de coordonatele y și z. In acest caz, ecuația Poisson se scrie



$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Fie un punct oarecare M de abscisă x_M aflat între K și A și unde potențialul este V. Care va fi viteza v în M a unui electron de sarcină e și masă m care pleacă din repaus ($v_0 = 0$) de la K sub acțiunea cîmpului electric $\vec{E}$ creat între K și A? Se aplică teorema variației energiei cinetice

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L$$

L = lucrul mecanic al forţei electrice.

$$L = F\cdot x_M = E\cdot e\cdot x_M = \frac{V}{x_M}\cdot e\cdot x_M = e\cdot V$$

Rezultă $v = \sqrt{2\, eV/m}$. Densitatea de curent j are valoarea $j = -nev$, în care n = concentraţia electronilor (numărul de electroni din unitatea de volum), iar $-ne = \rho$ = sarcina electrică cuprinsă în unitatea de volum = densitate de sarcină. Deci, $j = -\rho v$; semnul minus apare datorită sarcinii electrice negative a electronului "-e". Putem scrie

$$\rho = -j/v = -j\sqrt{m/2\, eV(x)},\quad (1)\quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\, eV(x)}}\ .$$

In regim staţionar j = const. Inmulţind ecuaţia (1) cu $2\frac{dV(x)}{dx}dx$ rezultă

$$(2)\quad 2\frac{dV(x)}{dx}\cdot\frac{d^2V(x)}{dx^2}\cdot dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\cdot dx = 2\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eV(x)}}\cdot\frac{dV(x)}{dx}dx$$

Deoarece

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\cdot dx = d\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \quad \text{şi} \quad \frac{dV}{dx}dx = dV$$

rezultă prin integrare

$$\int d\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 2\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int V^{-1/2}\cdot dV \quad \Rightarrow$$

$$(3)\quad \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 4\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\, V^{1/2} + C_1$$

C_1 = constantă de integrare.

Deoarece, prin ipoteză, cîmpul electric $E = -\frac{dV}{dx}$ pentru $x = 0$ (vezi ipoteza c) din enunţ) trebuie să fie zero şi întrucît $V(x) = -E\,x$ rezultă, de asemenea, că pentru $x = 0$ $V(x=0) = 0$. Aplicînd aceste condiţii la limită în ecuaţia (3) $\Rightarrow C_1 = 0$. Din ecuaţia (3) rezultă

$$\frac{dV}{dx} = 2\cdot\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\cdot V^{1/4}\ .$$ Prin integrare $\Rightarrow$

$$\int_0^U V^{-1/4}\cdot dV = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\cdot\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\int_0^L dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} V^{3/4} \Big|_0^U = 2 \sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}} \sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\, x \Big|_0^L \Rightarrow \frac{4}{3} U^{3/4} = 2 \cdot \sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}} \sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\, L$$

Prin ridicarea la pătrat a ultimei relații

$$j = \frac{4}{9} \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{U^{3/2}}{L^2} \Rightarrow (4) \quad \boxed{j = C\, U^{3/2}}$$, în care

$C = 4/9 \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{2e/m} \cdot L^{-2}$. Ecuația (4) se numește "legea 3/2".

1.63. Să notăm cu r distanța de la un punct dat al spațiului la un punct P arbitrar. Să se demonstreze că scalarul $\Psi = 1/r$ satisface ecuația lui Laplace $\Delta(1/r) = 0$.

R.: Alegem punctul P ca origine a coordonatelor. Notînd cu (x,y,z) coordonatele punctului dat putem scrie $r^2 = x^2+y^2+z^2$. De unde $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Mai departe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$.

Să calculăm $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) =$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

Analog:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

Deci

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + 3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0$$

1.65. Să se aplice teorema Gauss-Ostrogradski în cazul cîmpului vectorilor de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ în cazul unei suprafețe sferice Σ de rază r.

R.: Conform teoremei G.O. trebuie verificată egalitatea

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{r} \cdot d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{r} \cdot \vec{dS}$$, τ = volumul sferei

Calculăm $\text{div}\,\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. Cum $\iiint d\tau = \tau$,

$\tau = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow \iiint_\tau \text{div}\,\vec{r}.d\tau = 3.\tau = 4\pi r^3$. Deoarece

$\vec{r} \cdot \vec{dS} = \vec{r}.\vec{n}.dS$ în care $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ putem scrie în continuare:

$\vec{r} \cdot \vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})/r = (x^2+y^2+z^2)/r =$

$= r^2/r = r =$ raza sferei considerate. Deci

$$\oiint_\Sigma \vec{r}.\vec{dS} = \oiint_\Sigma \vec{r}.\vec{n}.dS = r \oiint_\Sigma dS = r.S = r.4\pi r^2 = 4\pi r^3$$

$S = 4\pi r^2 =$ suprafaţa sferei considerate. Deoarece volumul sferei $\tau = \frac{4\pi}{3}.r^3$ rezultă că teorema G.O se verifică.

1.66. Fie vectorul $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ în care $\vec{b}$ este un vector constant, iar $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ reprezintă vectorul de poziţie a unui punct arbitrar din spaţiu. Să se verifice teorema Stokes în acest caz.

R.: Conform teoremei Stokes este necesară verificarea egalităţii

$$\oint_C \vec{a} \cdot \vec{dr} = \iint_S \text{rot}\,\vec{a} \cdot \vec{dS}$$

Calculăm $\text{rot}\,\vec{a}$:

$$(1)\quad \text{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$- \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Pe de altă parte din

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_x = b_y z - y b_z \\ a_y = x b_z - z b_x \\ a_z = y b_x - x b_y \end{cases} \quad (2)$$

Introducem relaţiile (2) în (1) şi rezultă

$$\text{rot}\,\vec{a} = 2\,b_x\vec{i} + 2\,b_y\vec{j} + 2\,b_z\vec{k} = 2\,\vec{b}$$

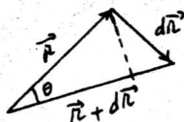
Deci

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\vec{dS} = \iint_S 2\vec{b}\cdot\vec{dS} = 2\,\vec{b}\cdot\vec{S}$$

Să calculăm:

$$\oint_C \vec{a}\cdot\vec{dr} = \oint_C (\vec{b}\times\vec{r})\cdot\vec{dr}$$

Utilizăm proprietatea că produsul mixt nu se modifică prin permutări circulare ale factorilor: $(\vec{b}\times\vec{r})\cdot\vec{dr} = (\vec{r}\times\vec{dr})\cdot\vec{b}$ și demonstrăm că elementul de suprafață orientat $\vec{dS} = \frac{1}{2}\,\vec{r}\times\vec{dr}$



(v.figura). Intr-adevăr

$$dS = \frac{|\vec{r}+\vec{dr}|\cdot\sin\theta\cdot|\vec{r}|}{2}$$

expresie care sugerează scrierea vectorială a suprafeței orientate $\vec{dS}$:

$$\vec{dS} = \frac{\vec{r}\times(\vec{r}+\vec{dr})}{2} = \frac{\vec{r}\times\vec{r}}{2} + \frac{\vec{r}\times\vec{dr}}{2} = \frac{\vec{r}\times\vec{dr}}{2}$$

(deoarece $\vec{r}\times\vec{r} = 0$).

Putem, deci, scrie

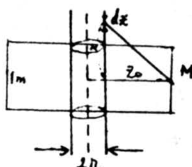
$$\oint_C (\vec{b}\times\vec{r})\cdot\vec{dr} = \oint_C \frac{\vec{r}\times\vec{dr}}{2}\cdot 2\vec{b} = 2\vec{b}\oint_C \vec{dS} = 2\,\vec{b}\cdot\vec{S} \quad \text{Q.E.D.}$$

1.67. Fie o tijă cilindrică de rază r, infinit lung și care are pe unitatea de lungime sarcina λ. Să se determine cîmpul electric într-un punct M prin metodele:

a) Metoda teoremei lui Gauss.

b) Metoda potențialului.

R: a) Vom adopta ca suprafață gaussiană un cilindru a cărui bază are raza z_0 și înălțimea egală cu 1 m. Deoarece liniile de cîmp sînt toate (din motive de simetrie) perpendiculare la suprafața laterală a cilindrului, suprafețele de la baza cilindrului nu sînt traversate de linii de cîmp (fluxul este zero). Aplicăm teorema Gauss la suprafața laterală:



$$S_\ell = 2\pi z_0\cdot 1$$

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\ ; \quad Q = \lambda\cdot l\ ; \quad \vec{E}\cdot\vec{dS} = E\cdot dS \Rightarrow$$

$$E\int dS = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot S = E\cdot 2\pi z_0 = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\ ;\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 z_0}$$

Expresia lui E nu depinde de r, totul se petrece ca și cînd toată sarcina firului ar fi concentrată pe axul său.

b) Fie un element de lungime dx al firului.

Sarcina corespunzătoare este $dq = \lambda dx$. Potențialul elementar dV în M creat de dq este

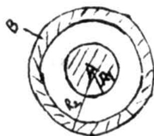
$$dV = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{z_0^2+x^2}}$$

Potențialul total creat în M de jumătate din tijă este

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{z_0^2+x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\ln(x+\sqrt{x^2+z_0^2})\Big|_0^\infty$$

Dar, $\ln(\infty+\sqrt{\infty^2+z_0^2}) = \ln(\infty+\infty) = \infty$. Acest potențial este infinit. Acest lucru se datorează faptului că sarcina repartizată pe fir este infinită. Determinarea cîmpului electric cu ajutorul potențialului este imposibilă în acest caz.

1.68. Fie un condensator sferic alcătuit din două sfere conductoare concentrice A și B (v.figura) de raze R_1 și R_2. Să se aplice o metodă directă pentru a determina capacitatea condensatorului. Sarcina condensatorului este Q.



R: Să stabilim relația dintre sarcina Q a condensatorului și cîmpul electric E într-un punct aflat la o distanță $R_1 < r < R_2$ de centru. Aplicăm teorema Gauss sferei de rază r.

$$\oint_{S_r} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow \oint_{S_r} E\cdot dS = E\cdot S_r = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon}$$

Să exprimăm potențialul în funcție de cîmp:

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow E\, dr = -\, dV \Rightarrow V = -\int_{R_1}^{R_2} E\, dr =$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Deci,

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad \text{şi} \quad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} .$$

1.69. Sfera A izolată din problema precedentă este pusă la un potenţial V. Ce potenţial şi ce capacitate va avea sfera A dacă aceasta este înconjurată de sfera B în următoarele condiţii: a) sfera B este izolată; b) sfera B este legată la pămînt.

R.: a) Capacitatea sferei A izolată este $C_1 = 4\pi \varepsilon_0 R_1$, iar sarcina sa este $Q_1 = C_1 V = 4\pi \varepsilon_0 R_1 V$.

Cînd se apropie sfera B izolată, aceasta se va încărca prin influenţă pe faţa internă cu sarcina $-Q_1 = -4\pi \varepsilon_0 R_1 V$, iar pe faţa externă cu sarcina $+Q_1 = +4\pi \varepsilon_0 R_1 V$. In aceste condiţii potenţialul V al sferei A s-a schimbat. Un punct oarecare de pe sfera A are un potenţial V care se compune din suma a trei termeni:

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 V}{R_1} - \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 V}{R_2} + \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 V}{R_3}\right)$$

R_3 = raza exterioară a sferei B. Deci:

$$V' = V\left(1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right)$$

Date numerice. V = 1000 volţi, R_1 = 3 cm, R_2 = 5 cm, R_3 = 7 cm

$$V' = 1000\left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{7}\right) = 828 \text{ volţi}$$

Capacitatea lui A (sarcina de pe sfera A rămînînd constantă) este

$$C_2 = Q/V' = C_1 V/V' = C_1 \cdot \frac{1000}{828} = 1{,}2\, C_1$$

b) Dacă sfera B este legată la pămînt, sarcina de pe faţa externă a sferei B dispare şi potenţialul lui A (sau diferenţa de potenţial între A şi B) ia valoarea:

$$V'' = V(1 - R_1/R_2) = 1000\,(1 - 3/5) = 400 \text{ Volţi}$$

Capacitatea sferei A devine:

$$C_3 = \frac{Q}{V''} = \frac{C_1 V}{V''} = C_1 \frac{1}{1-R_1/R_2} = 4\pi\, \varepsilon_0 R_1 \frac{R_2}{R_2-R_1}.$$

Numeric:

$$C_3 = 4\pi \cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{5\cdot 3\cdot 10^{-4}}{(5-3)\cdot 10^{-2}} = 8{,}35\cdot 10^{-12}\ F$$

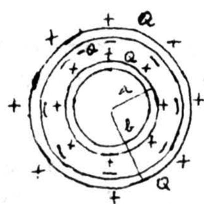
Remarcă:

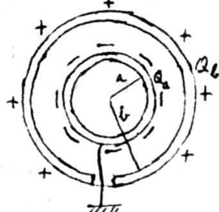
Dacă $R_2 = R_1 + e \Rightarrow$

$$C = 4\pi\, \varepsilon_0 \frac{R_1(R_1+e)}{e}. \quad \text{Dacă} \quad e \lll R_1 \Rightarrow$$

$$C = 4\pi\, \varepsilon_0 \frac{R_1^2}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = \text{Capacitatea condensatorului plan.}$$

1.70. Fie un condensator sferic de raze a şi b şi fie Q sarcina fiecăruia din cele două straturi sferice. Să se arate că dacă se leagă sfera interioară de rază "a" la pămînt capacitatea condensatorului sferic se măreşte de b/a ori.





R.: Dacă sarcina pe fiecare din straturile sferice este Q, potenţialele celor 2 sfere sînt $V_a = Q/4\pi\, \varepsilon_0 a$ şi $V_b = Q/4\pi\, \varepsilon_0 b$ şi diferenţa de potenţial între sfere este

$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{a\cdot b}$$

Capacitatea condensatorului sferic va fi, deci,

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{4\pi\, \varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad (1)$$

Dacă încărcăm acum sfera exterioară cu sarcina Q_b potenţialul ei şi al întregului volum din interiorul ei (şi al sferei interioare dacă nu este legată la pămînt) este dat de $V_b = Q_b/4\pi\, \varepsilon_0 b$. Cînd sfera interioară se leagă la pămînt poten-

ţialul său scade la zero. Acest lucru devine posibil dacă sfera legată la pămînt se încarcă de la acesta cu o sarcină Q_a astfel încît potenţialul pe faţa ei, datorat sarcinilor Q_b şi Q_a să fie nul. Cu alte cuvinte:

$$V_a = \frac{Q_b}{4\pi \varepsilon_o b} + \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon_o a} = 0 \quad \text{sau} \quad Q_a = -\frac{a}{b} Q_b$$

Acum potenţialul stratului exterior este, de asemenea, egal cu suma potenţialelor generate de sarcinile Q_b şi Q_a, adică:

$$V_b = \frac{Q_b}{4\pi \varepsilon_o b} + \frac{Q_a}{4\pi \varepsilon_o b} = \frac{Q_b}{4\pi \varepsilon_o b}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{Q_b(b-a)}{4\pi \varepsilon_o b^2}$$

Deci capacitatea condensatorului sferic, cu armătura exterioară încărcată cu sarcina Q_b şi cu armătura interioară legată la pămînt, este:

$$C' = \frac{Q_b}{V_b - V_a} = \frac{Q_b}{V_b} = \frac{4\pi \varepsilon_o b^2}{b-a}$$

Comparînd C' cu (1) $\Longrightarrow$ capacitatea condensatorului sferic cu armătura interioară legată la pămînt a crescut de b/a ori.

1.71. Două sfere metalice izolate, de raze $r_1 > r_2$, aflate la distanţă una de alta, se electrizează cu sarcini egale şi de acelaşi semn +Q şi apoi se reunesc printr-un fir conductor. a) Care dintre sfere va avea potenţialul mai mare, înainte şi după reunirea lor? b) Care dintre sfere va avea sarcina electrică mai mare după reunirea lor?

R.: a) $V_1 = Q/4\pi \varepsilon r_1$; $V_2 = Q/4\pi \varepsilon r_2$;

$$r_1 > r_2 \Rightarrow V_1 < V_2$$

După contactul dintre sfere, potenţialele lor devin egale:

$$V_1' = V_2' \; ; \quad V_1' = Q_1/4\pi \varepsilon r_1 \; ; \quad V_2' = Q_2/4\pi \varepsilon r_2 \; ;$$

$$Q_1/r_1 = Q_2/r_2 \qquad (1)$$

Din conservarea sarcinii electrice rezultă:

$$Q_1 + Q_2 = 2Q \qquad (2)$$

b) Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă Q_1 şi Q_2, valorile sarcinilor electrice după contact:

$$Q_1 = \frac{2\,Qr_1}{r_1+r_2}\ ;\quad Q_2 = \frac{2\,Qr_2}{r_1+r_2}\ ,\quad r_1 > r_2 \Rightarrow Q_1 > Q_2$$

1.72. Fie două sfere metalice A şi B de raze diferite aşezate concentric şi izolate una de alta. Cum se procedează ca una din sfere să aibă: a) potenţial zero şi sarcină electrică pozitivă; b) potenţial diferit de zero şi sarcină electrică nulă.

R.: a) Printr-un fir conductor care străbate peretele sferei exterioare B, electrizăm sfera A interioară cu sarcina "-q" prin contactul firului cu un generator electrostatic. Prin influenţă, pe faţa interioară a sferei B se acumulează sarcina electrică "+q", iar pe faţa exterioară a lui B, sarcina "-q". Conectînd forţa exterioară la pămînt, sarcina "-q" se scurge la pămînt. Sfera B dobîndind un potenţial $V_B = 0$, rămîne electrizată cu sarcina "+q" distribuită pe faţa interioară.

b) Punem exteriorul sferei B în contact cu o maşină electrostatică, încărcînd-o cu o sarcină pozitivă "+q", distribuită uniform pe sfera B. In acest mod, toate punctele din interiorul sferei B, deci şi sfera A, care se află în interiorul lui B, vor avea potenţialul electric al suprafeţei sferei B. Sfera A rămîne încărcată electric, avînd un potenţial diferit de zero.

1.73. Un condensator plan are o placă de sticlă cu $\varepsilon_r = 4$ între armături. Condensatorul este conectat la o tensiune U = = 6 Volţi. După deconectare se scoate placa de sticlă dintre armături. Care va fi noua diferenţă de potenţial dintre plăci?

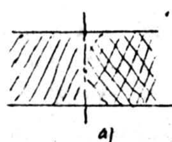
R.: Operaţia de extragere a plăcii de sticlă, după deconectarea surșei, nu schimbă valoarea sarcinilor electrice de pe armături. Se schimbă, însă, capacitatea condensatorului, deci şi tensiunea U dintre plăci ($C = Q/U$). Rezultă: $C = Q/U$; $C_o = Q/U_o$; $C/C_o = U_o/U$; $C/C_o = \varepsilon_r$

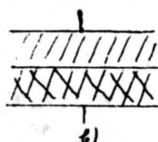
$$\left(C = \frac{\varepsilon S}{d}\ ;\quad C_o = \frac{\varepsilon_o S}{d}\right)$$

$$(\text{Se ştie că } \varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r) \Rightarrow U_o = \varepsilon_r U = 24 \text{ V}$$

1.74. Un condensator plan conţine între plăci două substanţe izolatoare, cu permitivităţile relative 4, respectiv 2. In ce caz capacitatea condensatorului este mai mare: cînd cele 2 substanţe izolatoare sînt aşezate ca în desenul a) sau ca în b) ?

R.: a) Condensatorul este echivalent cu două condensatoare grupate în paralel. Deci,





$C_p = C_1' + C_2'$; $C_p = \varepsilon_1 S_1/d + \varepsilon_2 S_2/d$; $S_1 = S_2 = S/2$;

$C_p = \varepsilon_1 S/2d + \varepsilon_2 S/2d$;

$$C_p = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \qquad (1)$$

b) Condensatorul este echivalent cu două condensatoare grupate în serie și deci:

$1/C_S = 1/C_1'' + 1/C_2''$; $1/C_S = d_1/\varepsilon_1 S + d_2/\varepsilon_2 S$;

$d_1 = d_2 = d/2$; $1/C_S = d/2\varepsilon_1 S + d/2\varepsilon_2 S$

$$C_S = \frac{2\cdot \varepsilon_0 S\cdot \varepsilon_{r1}\cdot \varepsilon_{r2}}{d(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \qquad (2)$$

Din (1) și (2) $\Longrightarrow$ $C_p > C_S$

1.75. Intre plăcile unui condensator plan se așază o foiță de Al, de grosime neglijabilă. Care este efectul foiței asupra capacității dacă: a) forița este izolată electric; b) este legată la placa superioară?

R.: a) Foița f de Al, introdusă în cîmpul electric, se va electriza (v.figura) prin influență. Fiind conductoare suprafața foiței f este echipotențială (V_f= const.). Sistemul este echivalent cu 2 condensatoare legate în serie. Rezultă:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \ ; \quad C_1 = \varepsilon_0 S/d_1 = 2\varepsilon_0 S/d \ ;$$

$$C_2 = \varepsilon_0 S/d_2 = 2\varepsilon_0 S/d \ ; \quad C = \varepsilon_0 S/d = C_0$$

(foița f se consideră plasată la jumătatea distanței d care există între plăcile condensatorului).

Concluzie: Foița de Al, de grosime neglijabilă nu are nici

un efect asupra capacității condensatorului.

b) Foița de Al, legată la placa superioară va avea același potențial ca și aceasta ($V_f = V_1$). Deci, ansamblul format din foița de Al și placa superioară va fi echivalent cu un condensator de capacitate $C_1 = q/V_1 - V_f = q/0 = \infty$. Intregul sistem este echivalent cu 2 condensatoare grupate în serie.

Rezultă:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1(1 + C_2/C_1)} = \frac{C_2}{1 + C_2/C_1}$$

Dacă $C_1 \rightarrow \infty \Rightarrow C = C_2 = 2\,\varepsilon_0 S/d = 2\,C_0$

1.76. Ce asemănări și deosebiri există cînd se introduce între armăturile unui condensator o placă de grosime d' cît jumătate din distanța d dintre armături: a) dielectrică; b) conducătoare.

R.: a) Dielectricul dintre armături este un izolant perfect, adică sarcinile electrice de pe o armătură nu pot trece pe cealaltă, decît dacă dielectricul ar fi în contact cu armăturile. Sarcinile electrice q de pe armăturile condensatorului creează atît în spațiul unde nu se află dielectricul, cît și în interiorul dielectricului un cîmp electric uniform cu intensitate $\vec{E}_0$. Datorită lui $\vec{E}_0$, pe fețele laterale ale plăcii dielectrice apar sarcinile de polarizare: "$+q_p$" și "$-q_p$". Prezența plăcii dielectrice face ca sistemul să fie echivalent cu trei condensatoare de capacități C_1, C', C_2 grupate în serie. In condițiile problemei: d' = grosimea plăcii dielectrice = d/2; $d_1 + d_2 = d/2$; d_1 și d_2 = distanțele de la armăturile condensatorului la placa dielectrică, putem scrie $C = 2\,\varepsilon_0 \varepsilon\, S/d(\varepsilon_0 + \varepsilon)$; $C_0 = \varepsilon_0 S/d \Rightarrow$ $C > C_0$.

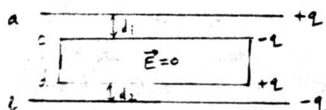
b) Placa metalică introdusă în cîmpul electric al condensatorului se va electriza, prin influență. Electronii liberi din interiorul plăcii metalice se vor deplasa pînă cînd în interiorul plăcii cîmpul electric să fie nul, iar suprafața plăcii să fie suprafață echipotențială (V = const.) (v.figura).

Tensiunea electrică între armăturile condensatorului este:

$$U_{ab} = V_a - V_b\,; \quad U_{ab} = V_a - V_c + V_c - V_d + V_d - V_b; \quad U_{ab} = V_a - V_c + V_d - V_b$$

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{db}\,; \qquad q/C = E_0 d_1 + E_0 d_2$$

In afara plăcii metalice $E_o = q/\varepsilon_o S$, care este acelaşi ca şi în absenţa plăcii metalice.



Deci, $q/C = q\,d_1/\varepsilon_o S + q d_2/\varepsilon_o S$

$1/C = 1/(\varepsilon_o S/d_1) + 1/(\varepsilon_o S/d_2)$;

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Concluzie: Existenţa plăcii metalice între plăcile unui condensator face ca sistemul să fie echivalent cu două condensatoare de capacităţi C_1 şi C_2 grupate în serie. Deoarece $d_1 + d_2 = d/2 \Rightarrow$

$C = 2\varepsilon_o S/d$; $C_o = \varepsilon_o S/d$; $C = 2\,C_o$

1.77. In timp ce un condensator rămîne conectat la baterie, se introduce între armăturile lui o placă dielectrică. Este necesar să se execute un lucru mecanic pentru introducerea dielectricului?

R.: Interacţiunea sarcinilor electrice de pe feţele interioare ale armăturilor condensatorului, cu sarcinile electrice induse de pe suprafaţa plăcii dielectrice, determină pătrunderea plăcii dielectrice între armăturile condensatorului. Vom considera că placa intră foarte încet între plăcile condensatorului. Deoarece condensatorul rămîne conectat la bornele generatorului, înseamnă că tensiunea la bornele sale U va rămîne constantă: $U = \frac{Q}{C}$ în timp ce atît capacitatea C cît şi sarcina Q vor creşte. Sarcina Q creşte datorită unui consum energetic suplimentar asigurat de generatorul electric.

Energia din cîmpul electric al condensatorului, înainte de pătrunderea plăcii dielectrice este: $W_o = \frac{1}{2} C_o U_o^2$, iar după pătrunderea plăcii dielectrice este: $W = \frac{1}{2} C\, U_o^2 = \varepsilon_r W_o > W_o$ $(\varepsilon_r > 1)$. Lucrul mecanic efectuat de forţele cîmpului electric al condensatorului, pentru atragerea plăcii dielectrice, este dat de teorema variaţiei energiei sistemului (condensator-placă):

$$L = W - W_o \quad ; \quad L = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\, C_o U_o^2$$

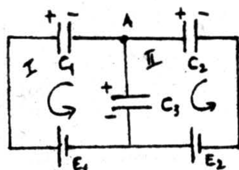
Fie acum cazul în care condensatorul este mai întîi decuplat de la bornele generatorului şi apoi lăsăm placa dielectrică

să pătrundă între armăturile sale. Sarcina electrică a condensatorului $Q = C\,U$ rămîne constantă în timp ce capacitatea C creşte, iar tensiunea la bornele condensatorului scade.

Energia cîmpului electric al condensatorului, după pătrunderea completă a plăcii între armături este:

$$W = q^2/2\,C = q^2/(\varepsilon_r \cdot q \cdot C_0) = W_0/\varepsilon_r$$

<u>1.78</u>. In schema reprezentată în figură condensatoarele au capacităţile C_1, C_2 şi C_3, iar sursele au t.e.m. E_1 şi E_2. Să se determine tensiunea la bornele fiecărui condensator.



<u>R</u>.: Se alege modul în care se încarcă fiecare dintre cele 3 condensatoare. Pentru C_1 şi C_2 modul de încărcare este sigur, pentru C_3 se alege însă un mod de încărcare arbitrar. Se scrie prima teoremă Kirchhoff în nodul A:

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \quad \text{sau} \quad -C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 = 0$$

Se scrie teorema a 2-a Kirchhoff pentru ochiurile I şi II. Rezultă:

$$U_1 + U_3 - E_1 = 0 \qquad U_2 - U_3 - E_2 = 0$$

Necunoscutele U_1, U_2, U_3 rezultă din sistemul celor 3 ecuaţii:

$$U_1 = C_3E_1 + C_2(E_1+E_2)/(C_1+C_2+C_3)$$
$$U_2 = C_3E_2 + C_1(E_1+E_2)/(C_1+C_2+C_3)$$
$$U_3 = (C_1E_1 - C_2E_2)/(C_1+C_2+C_3)$$

Pentru ca modul de încărcare al condensatorului C_3 să fie cel din figură (ales arbitrar) este necesar ca $C_1E_1 > C_2E_2$.

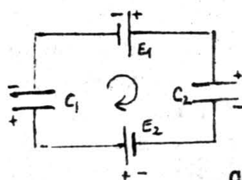
<u>1.79</u>. Să se determine tensiunile U_1 şi U_2 corespunzătoare condensatorilor C_1 şi C_2 din figură. Se consideră cunoscute:

<u>R</u>.: Aplicăm teorema a 2-a a lui Kirchhoff. Rezultă

$$E_1 - U_1 + E_2 - U_2 = 0$$

Deoarece sarcinile pe cei doi condensatori sînt identice

rezultă relaţia:



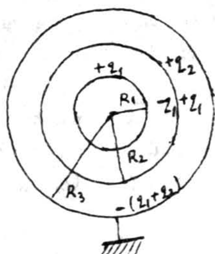
$$C_1U_1 = C_2U_2$$

Din sistemul celor 2 ecuaţii rezultă:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}(E_1+E_2) \quad \text{şi}$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1+C_2}(E_1+E_2)$$

1.80. Trei sfere metalice, goale în interior, formînd trei straturi sferice subţiri, au, respectiv, razele R_1, R_2 şi R_3. Sfera de rază R_1 are o sarcină electrică q_1, iar sfera mijlocie q. Straturile sferice sînt dispuse concentric ($R_1 < R_2 < R_3$), stratul exterior fiind legat la pămînt. Să se calculeze potenţialul sferei interioare.



R.: Deoarece un punct A arbitrar situat pe sfera de rază R_1 se găseşte în acelaşi timp în interiorul sferei de rază R_2 şi în interiorul sferei de rază R_3, potenţialul punctului A, V_1 este egal cu suma a trei potenţiale V_1', V_2' şi V_3' : $V_1 = V_1' + V_2' + V_3'$. Aceste potenţiale sînt generate de sarcinile: q_1, care se găseşte pe sfera de rază R_1, $-q_1$ şi q_1+q_2, care se găsesc pe faţa interioară respectiv exterioară a sferei de rază R_1 ($-q_1$ şi q_1 apar prin influenţă) şi $-(q_1+q_2)$, care se află pe faţa interioară a sferei de rază R_3 şi care apare prin influenţă datorită sarcinii (q_1+q_2) ce se află pe exteriorul sferei de rază R_2. Sarcina care apare prin influenţă pe suprafaţa externă a sferei de rază R_3 şi care are valoarea $-(q_1+q_2)$, se scurge la pămînt. Putem, deci, scrie:

$$V_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_1}\,; \quad V_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(-q_1)}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1+q_2}{R_2}\,;$$

$$V_3' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-(q_1+q_2)}{R_3}\,. \qquad \text{Deci,}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} - \frac{q_1+q_2}{R_3}\right)$$

2. CURENTUL ELECTRIC. REZISTENTA ELECTRICA

2.1. Spaţiul dintre două sfere metalice concentrice de raze r_1 şi r_2 ($r_2 > r_1$) este umplut cu un mediu conductor de rezistivitate ρ. Care este rezistenţa măsurată între faţa interioară şi exterioară? Cît devine această rezistenţă cînd raza exterioară tinde la infinit? Dacă între cele două sfere se stabileşte o diferenţă de potenţial constantă $V_2 - V_1$, care este intensitatea curentului ce trece prin mediul conductor?

R.: Considerăm o pătură sferică de rază r ($r_1 < r < r_2$) şi grosimea dr. Rezistenţa electrică între faţa interioară şi cea exterioară a păturii sferice este:

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

Stratul conductor ce umple spaţiul dintre cele două sfere metalice de raze r_1 şi r_2 este echivalent cu o grupare serie de rezistori elementari:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Cînd raza exterioară tinde la infinit, această rezistenţă devine:

$$R' = \lim_{r_2 \to \infty} \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi r_1}$$

Aplicînd legea lui Ohm putem determina intensitatea curentului ce trece prin mediul conductor:

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{4\pi r_1 r_2 (V_2 - V_1)}{\rho (r_2 - r_1)}$$

2.2. Un disc conductor de rază R_o, grosime h şi rezistivitate ρ este introdus într-un inel cu rezistivitatea neglijabilă faţă de ρ. In centrul discului se introduce un cilindru cu rezistivitate neglijabilă, de rază r_o. Discului i se aplică o tensiune continuă. Se cere să se determine: a) Rezistenţa discului măsurată între electrodul central şi inelul exterior; b) Intensitatea curentului în firele de alimentare dacă discului i se aplică tensiunea U; c) Puterea disipată în disc prin

efect Joule; d) distanţa de la axul discului la care rezistenţa sa scade la jumatate.

R.: a) Considerăm un inel de grosime dr situat la distanţa r de axul discului. Rezistenţa electrică a acestui inel este

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r h}$$

Rezistenţa discului este echivalentă cu o grupare serie de rezistori elementari:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h}\int_{r_o}^{R_o} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{R_o}{r_o}$$

b) Intensitatea curentului în firele de alimentare este:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2\pi h E}{\rho} \left(\ln \frac{R_o}{r_o}\right)^{-1}$$

c) Puterea disipată în disc este dată de expresia:

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{2\pi h E^2}{\rho \ln \frac{R_o}{r_o}}$$

d) Pentru a calcula distanţa de la axul discului la care rezistenţa sa scade la jumătate pornim de la egalitatea:

$$\frac{\rho}{4\pi h} \ln \frac{R_o}{r_o} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r}{r_o} \quad \text{sau} \quad \ln \sqrt{\frac{R_o}{r_o}} = \ln \frac{r}{r_o}$$

Deci

$$r = \sqrt{r_o R_o}$$

2.3. Să se determine expresia densităţii curentului electric care trece în vid, între doi electrozi plani la distanţa L unul de altul, între care s-a aplicat o diferenţă de potenţial U_a. Se vor lua în considerare următoarele ipoteze:

- electronii părăsesc catodul cu viteză nulă,
- în jurul catodului avem un număr mare de electroni, ce alcătuiesc o sarcină spaţială de densitate ρ,
- cîmpul electric la suprafaţa catodului este nul.

R.: Densitatea curentului electric ce traversează spaţiul dintre cei doi electrozi este:

$$j = -\rho\, v \qquad (1)$$

Viteza electronilor se determină din teorema variației energiei cinetice ($\Delta E_c = L$):

$$\frac{mv^2}{2} = eU \qquad \text{deci} \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \qquad (2)$$

Tensiunea electrică U dintre cei doi electrozi se determină cu ajutorul ecuației Poisson:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Folosind relațiile (1) și (2) ecuația diferențială (3) devine

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}} \qquad (4)$$

Pentru a integra această ecuație, se înmulțesc ambii membri din (4) cu $2\frac{dU}{dx}$. Deci

$$2\frac{dU}{dx}\cdot\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}\;\frac{dU}{dx} \qquad (5)$$

Dar

$$2\frac{dU}{dx}\cdot\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2$$

Ecuația (5) se poate scrie sub forma:

$$d\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2eU}}\,dU \qquad (6)$$

Ținînd cont că în regim staționar, densitatea de curent j este constantă, în urma integrării ecuației (6) obținem:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int U^{-1/2}\,dU = \frac{2j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}\,U^{1/2} + C_1 \qquad (7)$$

Pentru x = 0 avem $\frac{dU}{dx} = 0$ și U = 0, rezultă că constanta de integrare C_1 este nulă. Deci din relația (7) putem determina expresia derivatei $\frac{dU}{dx}$:

$$\frac{dU}{dx} = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}}\;\sqrt[4]{\frac{2m}{e}}\;U^{1/4} \qquad (8)$$

Integrăm ecuaţia diferenţială (8):

$$\int_0^{U_a} U^{-1/4}\, dU = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{2m}{e}}\int_0^L dx \qquad \text{obţinem}$$

$$\frac{4}{3} U_a^{3/4} = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{2m}{e}}\, L$$

Deci densitatea de curent are expresia:

$$j = \frac{4\sqrt{2}}{9L^2}\,\varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{m}}\, U_a^{3/2}$$

2.4. Fie un inel de secţiune rectangulară cu raza interioară a, raza exterioară b şi grosime h. Să se calculeze:

a) rezistenţa exactă a spirei (rezistenţa circulară);

b) rezistenţa aproximativă a spirei, luînd în calcul lungimea medie a acesteia;

c) eroarea relativă care se face la aflarea rezistenţei, operînd cu lungimea medie a spirei.

R.: a) Se consideră un element din spiră (un inel cu raza interioară r şi raza exterioară r+dr) de lungime $2\pi r$ şi de secţiune $dS = h.dr$. Conductanţa acestui element este

$$dG = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{h\,dr}{2\pi r} \qquad (1)$$

Deci conductanţa spirei se poate determina prin integrarea relaţiei (1):

$$G = \frac{h}{2\pi\rho}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{h}{2\pi\rho}\ln\frac{b}{a} \qquad (2)$$

Ca urmare, rezistenţa exactă a spirei este:

$$R = \frac{2\pi\rho}{h}\cdot\frac{1}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (3)$$

b) Rezistenţa aproximativă a spirei se calculează astfel:

$$R_a = \rho\frac{l_m}{S} = \rho\,\frac{2\pi\,\frac{a+b}{2}}{h(b-a)} = \frac{\pi\rho}{h}\cdot\frac{b+a}{b-a}$$

c) Eroarea care se face la calculul rezistenţei consi-

derînd lungimea medie a spirei este:

$$\Sigma = \frac{R_a - R}{R} = \frac{a+b}{2(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 1$$

2.5. Dintr-un material conductor cu rezistivitatea ρ se confecţionează un cadru pătratic cu latura interioară a, latura exterioară b şi grosimea h.

a) Să se determine rezistenţa între faţa interioară şi faţa exterioară a cadrului.

b) Dacă cadrul ar avea un mic întrefier, să se determine rezistenţa între capete.

R.: Se consideră un element din cadru, cu latura interioară r şi grosimea dr.

a) Fie rezistorul elementar de lungime dr şi secţiune S = 4 r h. Rezistenţa acestui rezistor este:

$$dR = \rho \frac{dr}{4\ r\ h}$$

Rezistenţa cadrului între faţa interioară şi faţa exterioară este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări serie de astfel de rezistori elementari:

$$R = \frac{\rho}{4\ h}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{4\ h} \ln \frac{b}{a}$$

b) Fie rezistorul elementar de lungime 4r şi secţiune S = h.dr. Conductanţa acestui rezistor este:

$$dG = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{h\ dr}{4r}$$

Rezistenţa cadrului între capetele întrefierului este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralel de astfel de rezistori elementari:

$$G = \frac{h}{4\rho}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{h}{4\rho} \ln \frac{b}{a}$$

Ca urmare, rezistenţa cadrului între baze este:

$$R = \frac{4\rho}{h \ln \frac{b}{a}}$$

2.6. Să se calculeze rezistenţele radială şi apoi cir-

culară, ale unui inel de cupru de secţiune rectangulară, ce are raza interioară $r_1 = 20$ mm, raza exterioară $r_2 = 60$ mm şi grosimea $e = 6$ mm. Se dă $\rho = 1,6\ \mu\Omega.cm$.

R.: Se consideră un inel elementar între razele r şi r+dr. Dacă inelul este parcurs de un curent radial, rezistenţa inelului elementar este:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r e} \qquad (1)$$

Rezistenţa radială a inelului este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări serie de astfel de rezistori elementari:

$$R_r = \frac{\rho}{2\pi e}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi e} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,47\ \mu\Omega \qquad (2)$$

Dacă inelul este parcurs de un curent circular, conductanţa inelului elementar este:

$$dG = \frac{1}{\rho} \frac{e\,dr}{2\pi r} \qquad (3)$$

Rezistenţa circulară a inelului este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralel de rezistori elementari:

$$G = \frac{e}{2\pi\rho}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{e}{2\pi\rho} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (4)$$

Deci rezistenţa circulară a inelului este:

$$R_c = \frac{2\pi\rho}{e \ln \frac{r_2}{r_1}} = 15,13\ \mu\Omega \qquad (5)$$

Din relaţiile (2) şi (5) se observă că produsul dintre rezistenţa radială şi rezistenţa circulară nu depinde de razele inelului:

$$R_r\, R_c = \left(\frac{\rho}{e}\right)^2$$

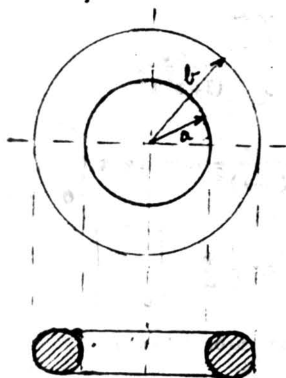
2.7. Se consideră o spiră toroidală, avînd secţiunea un cerc şi dimensiunile din figura 2.7.a. Să se calculeze:

a) rezistenţa exactă a spirei;

b) rezistenţa aproximativă, luînd în calcul lungimea medie a acesteia;

c) eroarea care se face la aflarea rezistenţei aproximative a spirei.

Se consideră dimensiunile a şi b mult mai mari decît diferenţa b-a.



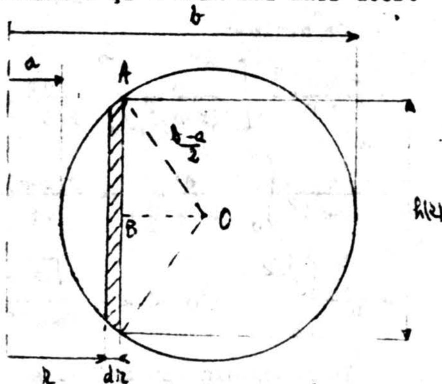


Fig. 2.7.a. Fig. 2.7.b.

R.: a) Se consideră un element din spiră, de rază interioară r şi rază exterioară r+dr. Cînd inelul este parcurs de un curent circular, conductanţa elementului din spiră considerat este $dG = \frac{1}{\rho}\frac{h(r)\,dr}{2\pi r}$

In triunghiul dreptunghic AOB ($AO = \frac{b-a}{2}$, $BO = \frac{a+b}{2} - r$) din teorema lui Pitagora se determină distanţa h(r):

$$\frac{1}{2}h(r) = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2} - r\right)^2} \quad \text{sau} \quad h(r) = \sqrt{(b-a)^2 - (a+b-2r)^2}$$

Rezistenţa circulară a spirei este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralel de astfel de rezistori elementari:

$$G = \frac{1}{2\pi\rho}\int_a^b \frac{\sqrt{(b-a)^2-(a+b-2r)^2}}{r}\,dr =$$

$$= \frac{1}{\pi\rho}\int_a^b \frac{\sqrt{(b-r)(r-a)}}{r}\,dr = \frac{1}{\pi\rho}\int_a^b \frac{b-r}{r}\cdot\sqrt{\frac{r-a}{b-r}}\,dr =$$

$$= \frac{2(b-a)^2}{\pi\rho}\int_0^{\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2(bt^2+a)}$$

S-a făcut schimbarea de variabilă

$$\sqrt{\frac{r-a}{b-r}} = t \quad \text{deci} \quad r = \frac{bt^2+a}{1+t^2} \quad \text{iar} \quad dr = \frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}\,dt \,.$$

Se obţine:

$$G = \frac{2(b-a)^2}{\pi\rho}\left[\frac{a}{(b-a)^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{b-a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{(b-a)^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{a}{b}}\right. = \frac{2(b-a)^2}{\pi\rho}\left[\frac{a}{(b-a)^2}\,\text{arc tg}\, t\,\Big|_0^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b-a}\int_0^{\pi/2}\cos^2\alpha\, d\alpha - \frac{\sqrt{ab}}{(b-a)^2}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\,\Big|_0^{\infty}\right]$$

In integrala din mijloc s-a făcut substituţia

$$t = \text{tg}\alpha \;, \quad dt = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \;, \quad 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Deci conductanţa spirei are expresia:

$$G = \frac{2(b-a)^2}{\pi\rho}\left[\frac{a}{(b-a)^2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{ab}}{(b-a)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\,(a+b-2\sqrt{ab})$$

In consecinţă rezistenţa circulară a spirei este:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{2\rho}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{2\rho\,(a+b+2\sqrt{ab})}{(b-a)^2}$$

b) Rezistenţa aproximativă a spirei este:

$$R_a = \rho\frac{l_m}{S} = \rho\cdot\frac{2\pi\,\frac{a+b}{2}}{\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4\rho\,(a+b)}{(b-a)^2}$$

c) Eroarea făcută la calculul aproximativ al rezistenţei este:

$$\varepsilon = \frac{R_a - R}{R} = \frac{2(a+b)}{a+b+2\sqrt{ab}} - 1 = \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)^2$$

Această eroare este minimă cînd dimensiunile a şi b au valori numerice mari şi apropiate.

2.8. Care este valoarea rezistenţei unui sector de coroană circulară de raze a = 5 cm şi b = 3 cm, de grosime e = = 1 mm, rezistivitate $\rho = 10^{-5}\Omega.\text{m}$ şi deschidere $\alpha = \pi/6$.

a) curentul este circular;

b) curentul este radial.

R.: Se consideră un element din sectorul de coroană circulară, de raze r şi r+dr.

a) Dacă sectorul este parcurs de un curent circular, rezistorul elementar are lungimea $r\alpha$ şi secţiunea dS = e dr. Deci conductanţa rezistorului elementar este

$$dG = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{e\,dr}{r\alpha}$$

Rezistenţa circulară a sectorului de coroană circulară este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralel de astfel de rezistori elementari:

$$G = \frac{e}{\rho\alpha}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{e}{\rho\alpha}\ln\frac{a}{b}$$

Deci rezistenţa circulară a sectorului de coroană circulară este:

$$R_c = \frac{1}{G} = \frac{\rho\alpha}{e} \cdot \frac{1}{\ln\frac{a}{b}} \simeq 10\ \text{m}\Omega$$

b) Dacă sectorul este parcurs de un curent radial atunci rezistorul elementar are lungimea dr şi secţiunea S = e $r\alpha$. Deci rezistenţa rezistorului elementar este:

$$dR = \rho\frac{dr}{e\,r\alpha}$$

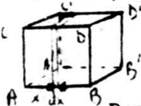
Rezistenţa radială a sectorului de coroană circulară este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări serie de astfel de rezistori elementari:

$$R_r = \frac{\rho}{e\,\alpha}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{e\,\alpha}\ln\frac{a}{b} = 10{,}2\ \text{m}\Omega$$

2.9. Să se determine rezistenţa unui cub de latură a, realizat dintr-un material de rezistivitate ρ .

R.: Se consideră un element din cub, aflat la distanţa x de vîrful A, de grosime dx şi înălţime a.

Dacă curentul parcurge cubul de la faţa ABCD la faţa A'B'C'D', conductanţa rezistorului elementar este:



$$dG = \frac{1}{\rho} \frac{a\,dx}{a}$$

Rezistenţa cubului între feţele ABCD şi A'B'C'D' este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări paralel de rezistori elementari:

$$G = \frac{1}{\rho}\int_0^a dx = \frac{a}{\rho} \quad \text{deci} \quad R = \frac{1}{G} = \frac{\rho}{a}$$

Dacă curentul parcurge cubul de la faţa ACC'A' la faţa BDD'B' rezistenţa rezistorului elementar este:

$$dR = \rho \frac{dx}{a^2}$$

Rezistenţa cubului între feţele ACC'A' şi BDD'B' este egală cu rezistenţa echivalentă a unei grupări serie de rezistori elementari:

$$R = \frac{\rho}{a^2}\int_0^a dx = \frac{\rho}{a}$$

Deci rezistenţa cubului între oricare două feţe opuse este $R = \frac{\rho}{a}$.

2.10. Un fir conductor are respectiv lungimea L, rezistenţa electrică R_o şi rezistivitatea ρ_0 la temperatura $\theta_o = 20^\circ C$. Să se arate că este neglijabilă eroarea relativă în calculul rezistenţei la o temperatură θ, dacă nu se consideră dilatarea termică.

R.: Notam cu d diametrul firului conductor, cu α coeficientul de variaţie a rezistivităţii cu temperatura, cu γ coeficientul de dilatare liniară, cu R valoarea rezistenţei la temperatura θ fără să ţinem cont de dilatarea termică şi cu R' valoarea rezistenţei la temperatura θ cînd ţinem cont de dilatarea termică.

Deci eroarea relativă în calculul rezistenţei la o temperatură θ, se scrie astfel:

$$\varepsilon = \frac{R - R'}{R'} =$$

$$= \frac{\frac{L}{\frac{\pi d^2}{4}} \rho_0 \left[1 + \alpha(\theta - \theta_0)\right] - \frac{L\left[1 + \gamma(\theta - \theta_0)\right]}{\frac{\pi d^2}{4}\left[1 + \gamma(\theta - \theta_0)\right]^2} \rho_0 \left[1 + \alpha(\theta - \theta_0)\right]}{\frac{L}{\frac{\pi d^2}{4}} \rho_0 \frac{1 + \alpha(\theta - \theta_0)}{1 + \gamma(\theta - \theta_0)}} =$$

$$= 1 + \gamma(\theta - \theta_0) - 1 = \gamma(\theta - \theta_0).$$

In cazul metalelor coeficientul de dilatare liniară este de ordinul 10^{-5} grd^{-1}, deci ε este de ordinul $10^{-4} \div 10^{-3}$, mai mic decît erorile uzuale de calcul, care sînt mai mari de 1%. In consecinţă eroarea produsă de neluarea în considerare a dilataţiei termice este neglijabilă.

De exemplu, pentru un conductor de cupru, la o variaţie a temperaturii de $\theta - \theta_0 = 60^\circ C$ eroarea produsă de neluarea în considerare a dilataţiei termice este:

$$\varepsilon = \frac{R-R'}{R'} = 1,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{grd} \cdot 60\ grd = 1,02 \cdot 10^{-3} = 0,102\ \%$$

2.11. Un circuit conţine un galvanometru de rezistenţă internă g, un şunt de rezistenţă s (s nu variază cu temperatura şi are valoarea 0,042 Ω); g variază cu temperatura (coeficientul de variaţie este 0,0038 grd^{-1}) valoarea sa fiind de 0,75 Ω la 15°C. Să se determine eroarea relativă comisă la măsurare, dacă temperatura firului galvanometrului se ridică de la $\theta_0 = 15^\circ C$ la $\theta = 27^\circ C$. La temperatura de 27°C galvanometrul indică 53 diviziuni. Care este curentul în circuitul principal? Galvanometrul indică 100 diviziuni pentru o tensiune la borne de 0,04 V, la temperatura 15°C.

R.: Din legile lui Kirchhoff şi legea lui Ohm:

$$i_g \cdot g = i_s \cdot s = U$$

$$I = i_g + i_s$$

rezultă pentru curentul din circuitul principal expresia:

$$I = U \frac{g\,s}{g+s}$$

Notăm cu I' valoarea curentului electric din circuitul principal la temperatura θ cînd ţinem cont de variaţia cu temperatura a rezistenţei galvanometrului. Deci eroarea relativă comisă la calcularea curentului din circuitul principal, la temperatura θ, dacă nu ţinem cont de variaţia cu temperatura a rezistenţei galvanometrului, este:

$$\varepsilon = \frac{I-I'}{I'} = \frac{\frac{Ugs}{g+s} - \frac{Ugs(1+\alpha\,\Delta\theta)}{g+s+g\alpha\Delta\theta}}{\frac{Ugs(1+\alpha\,\Delta\theta)}{g+s+g\alpha\,\Delta\theta}} = -\frac{s\,\alpha\cdot\Delta\theta}{(g+s)(1+\alpha\,\Delta\theta)} \simeq$$

$$\simeq \frac{-s\alpha\cdot\Delta\theta(1-\alpha\cdot\Delta\theta)}{g+s}$$

$$\varepsilon = -\frac{s\alpha\cdot\Delta\theta}{g+s} = -0{,}24\ \%$$

Curentul ce trece prin galvanometru este direct proporţional cu numărul de diviziuni indicate (i_g = K x nr.div.).

Deoarece la temperatura $\theta_0 = 15^\circ C$, pentru o tensiune la borne $U_0 = 0{,}04$ V, galvanometrul indică 100 diviziuni rezultă că putem scrie relaţia:

$$U_0 = K \cdot 100 \cdot g$$

La temperatura $\theta = 27^\circ C$, galvanometrul indică 53 diviziuni, deci, putem scrie că:

$$U = K\cdot 53\cdot g(1+\alpha\cdot\Delta\theta) = \frac{53}{100} U_0\ (1+\alpha\cdot\Delta\theta)$$

Deoarece eroarea relativă comisă la măsurarea curentului este mai mică de 1%, putem determina curentul din circuitul principal cu relaţia:

$$I = \frac{Ugs}{g+s} = \frac{53}{100}\ \frac{U_0 g\,s}{g+s} = 0{,}843\ mA$$

(Valoarea curentului în circuitul principal dacă ţinem cont de variaţia rezistenţei galvanometrului cu temperatura este:

$$I' = \frac{53}{100} \cdot \frac{U_0 gs(1+\alpha\cdot\Delta\theta)^2}{s+g+g\,\alpha\cdot\Delta\theta} = 0{,}841\ mA)$$

2.12. Un semiconductor a cărui rezistenţă variază cu temperatura, este legat la o sursă de tensiune, cu tensiunea la borne U. Rezistenţa semiconductorului variază cu temperatura după legea $R = R_o(1-\mu t)$, unde R_o este rezistenţa la temperatura $t = 0^oC$ şi $\mu > 0$. Să se găsească temperatura de echilibru a semiconductorului dacă temperatura mediului înconjurător este egală cu 0^oC, iar puterea disipată de semiconductor în mediul exterior este egală cu $P = b\cdot\Delta t$, unde Δt este diferenţa între temperatura semiconductorului şi cea a mediului înconjurător. Se neglijează variaţia dimensiunilor semiconductorului cu temperatura. Care este valoarea maximă a tensiunii la care se mai poate stabili echilibrul termic.

R.: Puterea disipată în semiconductor este:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_o(1-\mu t)}$$

Temperatura de echilibru se stabileşte cînd puterea disipată în semiconductor este egală cu puterea eliberată mediului înconjurător:

$$\frac{U^2}{R_o(1-\mu t)} = b\,t$$

Deci obţinem ecuaţia de gradul doi în t :

$$b\,R_o\,\mu\cdot t^2 - b\,R_o\cdot t + U^2 = 0$$

ce are soluţiile:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2\mu}\left(1 \pm \sqrt{1 - U^2\frac{4\mu}{R_o b}}\right)$$

Temperaturile pentru care se stabileşte echilibrul termic sînt:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2\mu}\left(1 \pm \sqrt{1-U^2\frac{4\mu}{R_o b}}\right) \quad \text{pentru} \quad U \quad \left(0,\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_o b}{\mu}}\right]$$

Deci tensiunea maximă U_o la care se poate stabili echilibrul termic este:

$$U_o = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_o b}{\mu}}$$

2.13. Două sfere conductoare A şi B, de capacităţi $C_A = 4\ \mu F$ şi $C_B = 5\ \mu F$ sînt încărcate la potenţialele $V_A = 810$ V

şi V_B = 900 V. La fiecare sferă este sudată o tijă metalică. Capetele tijelor se introduc într-o soluţie de sulfat de cupru (k = 0,33 mg/C). Ce cantitate de cupru se depune şi pe care tijă?

R.: Soluţia de sulfat de cupru realizează contactul între cele două sfere, deci sferele vor ajunge la acelaşi potenţial V. Scriem conservarea sarcinii:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B$$

unde:

$$Q_A = C_A V_A \qquad Q'_A = C_A V$$

$$Q_B = C_B V_B \qquad Q'_B = C_B V$$

Deci potenţialul la care ajung sferele este:

$$V = \frac{V_A C_A + V_B C_B}{C_A + C_B}$$

Deoarece iniţial potenţialul sferei B este mai mare decît potenţialul sferei A rezultă că trece o cantitate de electricitate ΔQ de pe sfera B pe sfera A:

$$\Delta Q = Q_B - Q'_B = Q'_A - Q_A = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B}(V_B - V_A)$$

Pe tija sferei A se depune o masă de cupru, care conform legii întîi a electrolizei, este:

$$m = k \cdot \Delta Q = k \frac{C_A C_B}{C_A + C_B}(V_B - V_A) = 66.10^{-6}\ mg$$

2.14. Care este grosimea stratului de cupru depus uniform prin electroliza unei soluţii de sulfat de cupru pe un catod sferic în timp de o oră, dacă densitatea curentului electric la suprafaţa catodului este j = 0,1 A/cm^2? Se ştie că raza sferei este mult mai mare decît grosimea stratului de cupru depus. Densitatea cuprului este $\rho = 8,9\ kg/dm^3$.

R.: Deoarece grosimea h a stratului de cupru depud este mult mai mică decît raza sferei, putem aproxima volumul stratului cu:

$$V = 4\pi R^2 h$$

Conform legii întîi a electrolizei, cantitatea de cupru depusă în timpul t este:

$$m = k I t$$

dar

$$m = \rho V = 4\pi R^2 \rho h$$

$$I = j S = 4\pi R^2 j$$

Deci grosimea stratului de cupru este .

$$h = \frac{k j t}{\rho} = 0,133 \text{ mm}$$

2.15. Prin secţiunea transversală a unui conductor, de arie $S = 10 \text{ mm}^2$, trece uniform în acelaşi sens, în intervalul de timp $t = 0,5$ min, un număr $n = 10^{22}$ de electroni liberi. Se cer: a) intensitatea I a curentului electric; b) densitatea j a curentului electric.

R.: a) Intensitatea curentului electric prin conductor este egală cu raportul dintre sarcina electrică ce traversează secţiunea conductorului într-un interval de timp t şi acest interval de timp:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n e}{t} = 53,3 \text{ A}$$

b) Prin definiţie densitatea j a curentului electric este dată de relaţia:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{ne}{St} = 5,33 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

2.16. Un curent de 10 A trece printr-un fir de cupru de 1 mm^2 secţiune. Dacă densitatea de sarcină în fir datorită electronilor liberi este $\rho = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$, să se găsească viteza de deplasare a electronilor.

R.: Conform definiţiei intensităţii curentului electric:

$$I = \frac{Q}{t} = \rho S v$$

Deci

$$v = \frac{I}{\rho S} = 0,625 \text{ mm/s}$$

2.17. Un fir de cupru de secţiune 2 mm^2 este parcurs de un curent de 1 A. Tensiunea aplicată pe metru este de 41 mV. Se cere:

a) mobilitatea electronilor. Se consideră că toţi atomii sînt transformaţi în ioni de Cu^{2+};

b) rezistivitatea cuprului.

Se dă densitatea cuprului $\rho = 8,9\ g/cm^3$ şi masa atomică a cuprului A = 63,5 g.

R.:a) Numărul de electroni liberi din unitatea de volum este:

$$n = 2 \cdot N_A \cdot \frac{\rho}{A} = 1,68 \cdot 10^{29}\ \text{electroni}/m^3$$

Viteza medie a electronilor se calculează din relaţia:

$$I = e\,n\,S\,v \quad \text{deci} \quad v = \frac{I}{e\,n\,S} = 0,18 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

Mobilitatea electronilor este

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{v\,\ell}{U} = 4,5 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^2}{V \cdot s}$$

b) Rezistivitatea o calculăm folosind expresia:

$$E = \frac{U}{\ell} = \frac{RI}{\ell} = \frac{\rho}{S}\,I$$

De unde

$$\rho = \frac{U}{\ell} \cdot \frac{S}{I} = 0,082 \cdot 10^{-6}\ \Omega.m$$

2.18. Izolaţia omogenă şi izotropă a unui cablu coaxial este străbătută de un curent electric alternativ de intensitate $i = 6\pi \sin 100\pi t$ (μA). Se cunosc lungimea L = 10 m a cablului, raza conductorului interior r_i = 1 mm şi raza interioară a conductorului exterior r_e = 4 mm. Să se determine: a) valoarea maximă j_m a densităţii curentului electric din izolaţie; b) raportul dintre valorile densităţii curentului din izolaţie la suprafaţa conductorului interior şi a celui exterior; c) expresia densităţii curentului electric ca funcţie de timp şi de distanţa r pînă la axa de simetrie a cablului.

R.: a) Valoarea maximă j_m a densităţii curentului electric din izolaţie este:

$$j_m = \frac{I_{max}}{S_{min}} = \frac{I_{max}}{2\pi r_i L} = 300\ \frac{\mu A}{m^2}$$

b) Raportul dintre valorile densităţii curentului din izolaţie la suprafaţa conductorului interior şi a celui exterior este:

$$\frac{j_i}{j_e} = \frac{S_e}{S_i} = \frac{r_e}{r_i} = 4$$

c) densitatea curentului electric, conform definiției este:

$$j = \frac{i}{S} = \frac{I_{max}\sin \omega t}{2\pi rL} = \frac{3}{10\, r}\sin 100\pi t \left(\frac{\mu A}{m^2}\right).$$

2.19. Un disc izolator de rază R are pe suprafață densitatea superficială de sarcină σ . Discul se rotește cu viteza unghiulară ω . Să se găsească intensitatea curentului circular total.

R.: Pe discul de rază R se consideră un element de grosime dr, aflat la distanța r de centru, ce are suprafața

$$dS = 2\pi r\, dr$$

Sarcina electrică de pe acest element este:

$$dq = \sigma\, dS = 2\pi r \sigma\, dr$$

Curentul datorat mișcării sarcinii dq într-o perioadă este:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega\, dq}{2\pi} = \omega \sigma r\, dr$$

Deci intensitatea curentului circular total devine:

$$I = \omega\sigma \int_0^R r\, dr = \frac{\omega \sigma R^2}{2}$$

2.20. O sarcină Q este distribuită pe două condensatoare plane identice conectate în paralel. La momentul de timp t = 0, distanța între plăcile unui condensator începe să crească uniform după legea $d_1 = d+vt$, iar distanța între plăcile celuilalt începe să scadă uniform după legea $d_2 = d-vt$. Neglijînd rezistența firelor de legătură să se determine intensitatea curentului prin circuit cînd plăcile condensatoarelor se mișcă și să se specifice sensul curentului.

R.: Fie q_1 și q_2 sarcinile de pe cele două condensatoare la un moment oarecare t.

Scriem conservarea sarcinii:

$$Q = q_1 + q_2$$

Deoarece condensatorul sînt conectaţi în paralel, putem scrie:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

unde

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d+vt} \quad \text{iar} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-vt}$$

Din aceste relaţii rezultă pentru sarcinile q_1 şi q_2 următoarele expresii:

$$q_1 = \frac{Q(d-vt)}{2d} \quad \text{şi} \quad q_2 = \frac{Q(d+vt)}{2d}$$

Deci

$$\Delta q_1 = -\frac{Q\,v\,t}{2d} \quad \text{iar} \quad \Delta q_2 = \frac{Q\,v\,t}{2d}$$

(scăderea sarcinii pe un condensator este egală cu creşterea sarcinii pe celălalt).

Intensitatea curentului în circuit va fi:

$$I = -\frac{\Delta q_1}{t} = \frac{\Delta q_2}{t} = \frac{Q\,v}{2d}$$

Curentul circulă prin firele de legătură de la placa încărcată pozitiv a condensatorului a cărui distanţă dintre plăci creşte spre placa încărcată pozitiv a celuilalt condensator.

2.21. Intr-un mediu de rezistivitate ρ şi permitivitate ε se găsesc doi electrozi sferici, perfect conductori, de rază a, mult mai mică decît distanţa d dintre ei. Să se calculeze rezistenţa R dintre cei doi electrozi, alimentaţi la tensiunea continuă.

R.: Potenţialele a două sfere de rază a, încărcate cu sarcinile q şi -q sînt:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon a} \quad \text{şi} \quad V_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon a}$$

Diferenţa de potenţial dintre cele două sfere este:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon a}$$

Capacitatea sistemului format din cele două sfere este:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 2\pi \varepsilon a$$

Pe baza teoremei legăturii între capacitatea şi conductanţa ariilor corespondente pentru sisteme cu aceeaşi configuraţie geometrică ($C/G = \varepsilon/\sigma$) rezultă că conductanţa dintre cele două sfere are expresia:

$$G = 2\pi \sigma a = 2\pi \frac{a}{\rho}$$

Deci rezistenţa R dintre cei doi electrozi sferici alimentaţi la o tensiune continuă este:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho}{2\pi a}$$

2.22. Doi cilindri perfect conductori de lungime ℓ, paralеli, situaţi la distanţa d unul de celălalt, într-un mediu omogen de permitivitate ε şi rezistivitate ρ sînt alimentaţi cu tensiunea continuă U. Raza cilindrilor este a, mult mai mică decît distanţa d dintre ei. Să se calculeze rezistenţa electrică dintre cei doi conductori.

R.: Fie λ densitatea liniară de sarcină. Intensitatea cîmpului electric creat de sarcina unuia dintre cilindri se poate determina cu ajutorul legii lui Gauss:

$$E \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon}$$

Deci intensitatea cîmpului electric în regiunea dintre cei doi cilindri este:

$$E(r) = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon r}$$

Dar

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{deci} \quad V = -\int E(r)\, dr = -\frac{\lambda}{\pi \varepsilon} \ln r$$

Tensiunea dintre cei doi cilindri este:

$$U = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon} \ln \frac{d}{a}$$

Sarcina cu care este încărcat un cilindru este:

$$Q = \lambda \cdot \ell$$

Deci capacitatea liniei bifilare are expresia:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi l \varepsilon}{\ln(d/a)}$$

Conform teoremei legăturii dintre capacitatea şi conductanţa ariilor corespondente, conductanţa dintre cei doi cilindri este:

$$G = \frac{C\sigma}{\varepsilon} = \frac{\pi l \sigma}{\ln \frac{d}{a}}$$

Prin urmare rezistenţa dintre cei doi cilindri este:

$$R = \frac{\rho \ln \frac{d}{a}}{\pi l}$$

2.23. Un cablu coaxial are între cele două conductoare un dielectric de rezistivitate ρ şi permitivitate ε . Se nosc lungimea l a cablului, raza conductorului interior a şi raza interioară a conductorului exterior b. Să se calculeze conductanţa dielectricului.

R.: Fie λ densitatea superficială de sarcină pe cilindrul inferior. Intensitatea cîmpului electric în regiunea dintre cei doi cilindri, folosind legea lui Gauss, este:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \lambda \cdot 2\pi a l \quad \text{deci} \quad E = \frac{\lambda a}{\varepsilon r}$$

Diferenţa de potenţial dintre cei doi cilindri este:

$$U = \int_a^b E(r)\, dr = \frac{\lambda a}{\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

Sarcina electrică distribuită pe suprafaţa cilindrului inferior (sarcina cu care este încărcat condensatorul cilindric) este:

$$Q = \lambda \cdot 2\pi a l$$

Capacitatea condensatorului cilindric este deci:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

Iar conductanţa cablului coaxial are expresia:

$$G = \frac{2\pi\sigma l}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi l}{\rho \ln\frac{b}{a}}$$

2.24. Un vas metalic de formă emisferică de rază b, conţine electrolit cu rezisticitate ρ . Un electrod, de asemenea, emisferic de rază a este cufundat în electrolit, astfel încît emisferele au aceeaşi axă de simetrie. Cele două armături sînt conectate la o sursă de tensiune electromotoare E şi rezistenţă interioară r. Tensiunea la bornele sursei rămîne practic constantă, indiferent de sarcină, Să se găsească relaţia dintre razele celor două emisfere, astfel încît puterea electrică disipată în electrolit să fie maximă.

R.: Fie λ densitatea superficială de sarcină. Intensitatea cîmpului electric în regiunea dintre două pături sferice este:

$$E = \frac{\lambda a^2}{\varepsilon r^2}$$

Diferenţa de potenţial dintre păturile sferice:

$$U = \frac{\lambda a^2}{\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda a^2}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

Capacitatea condensatorului sferic este:

$$C_s = \frac{Q}{U} = 4\pi a^2 \lambda \cdot \frac{\varepsilon ab}{\lambda a^2 (b-a)} = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

Condensatorul emisferic are capacitatea:

$$C = \frac{C_s}{2} = \frac{2\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

Prin analogie, rezultă conductanţa electrolitului dintre cele două armături:

$$G = \frac{2\pi\sigma ab}{b-a} = \frac{2\pi ab}{\rho(b-a)}$$

iar rezistenţa:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho(b-a)}{2\pi ab}$$

Condiţia de transfer maxim de putere ($\frac{dP}{dR} = 0$) este

Deci:

$$r = \frac{\rho(b-a)}{2\pi ab} \quad \text{de unde rezultă} \quad a = \frac{b\rho}{2\pi rb+\rho}$$

2.25. Un vas paralelipipedic de înălţime h conţine două armături paralele, avînd aria simplă S şi aşezate la distanţa d una de cealaltă. In vas se toarnă apă şi ulei (de rezistivităţi ρ_1 şi ρ_2) pînă la umplerea completă. Cele două armături sînt alimentate de la o sursă de tensiune electromotoare avînd t.e.m. E şi rezistenţa interioară r. Să se calculeze înălţimea apei din vas, astfel încît puterea disipată, prin efect electrocinetic în electrolit (apă şi ulei) să fie maximă.

R.: Vasul paralelipipedic cu cei doi electroliţi (apă şi ulei) este echivalent cu doi rezistori legaţi în paralel, ai căror conductanţe sînt:

$$G_1 = \frac{\sigma_1 C_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1 S_1}{d} \quad \text{şi} \quad G_2 = \frac{\sigma_2 C_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 S_2}{d}$$

Conductanţa vasului este:

$$G = G_1+G_2 = \frac{1}{d}(\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2) = \frac{S}{hd}\left(\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h-h_1}{\rho_2}\right)$$

Puterea disipată în electrolit este maximă dacă este îndeplinită condiţia R = r sau $G = \frac{1}{r}$:

$$\frac{S}{h\,d}\left(\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h-h_1}{\rho_2}\right) = \frac{1}{r}$$

Deci înălţimea apei din vas pentru care puterea disipată în electrolit este maximă este:

$$h_1 = \frac{h\rho_1(d\rho_2 - Sr)}{Sr(\rho_2 - \rho_1)}$$

2.26. Intr-un vas paralelipipedic se găseşte un electrolit de rezistivitate ρ. Vasul conţine două armături plane avînd aria S şi situate la distanţa ℓ una de cealaltă. Armăturile sînt alimentate din exterior cu un curent care are intensitatea I. Să se calculeze tensiunea electrică dintre armături.

R.: In electrolit, cîmpul electric este:

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

Considerînd densitatea de curent j constantă, atunci:

$j = \frac{I}{S}$ şi deci $E = \rho j = \rho \frac{I}{S}$

Tensiunea electrică dintre armături este:

$$U = E\ell = \rho \frac{I}{S} \ell$$

3. CIRCUITE ELECTRICE IN CURENT CONTINUU

3.1. Să se calculeze rezistenţele rezistoarelor din montajul în stea din figura 3.1.a. pentru ca acesta să fie echivalent montajului triunghi, ale cărui rezistoare au valori cunoscute ale rezistenţelor (teorema Kennely).

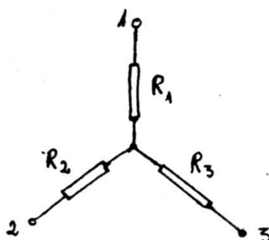


Fig.3.1.a.

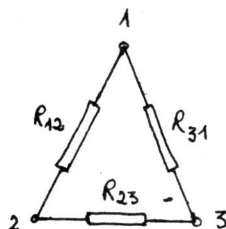


Fig.3.1.b.

R.: Deoarece montajele sînt echivalente, trebuie ca, rezistenţa echivalentă între punctele 1 şi 2 în conexiunea stea să fie egală cu rezistenţa echivalentă între punctele 1 şi 2 în conexiunea triunghi:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (1)$$

Similar pentru punctele 2 - 3 şi 3 - 1:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31}+R_{12})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (3)$$

Scăzînd relaţia (1) cu (3) se obţine:

$$R_2 - R_3 = \frac{R_{23}(R_{12}-R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (4)$$

Adunînd relaţia (4) cu (2) rezultă:

$$R_2 = \frac{R_{23}\, R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (5)$$

Prin operaţii similare, sau prin permutări circulare se obţin şi expresiile pentru celelalte rezistenţe, R_1 şi R_3:

$$R_1 = \frac{R_{12}\, R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (6)$$

$$R_3 = \frac{R_{31}\, R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (7)$$

3.2. Utilizînd rezultatele obţinute la problema precedentă, să se stabilească relaţiile pentru transfigurarea inversă stea-triunghi (teorema Kennely).

R.: Impărţind relaţiile (5), (6) şi (7) de la problema precedentă obţinem:

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_{12}}{R_{31}} \quad \text{deci} \quad R_{31} = R_{12}\frac{R_3}{R_2} \qquad (1)$$

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}} \quad \text{deci} \quad R_{23} = R_{12}\frac{R_3}{R_1} \qquad (2)$$

Adunînd relaţiile (5), (6) şi (7) de la problema precedentă obţinem:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23}+R_{23}R_{31}+R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (3)$$

Inlocuind relaţiile (1) şi (2) în relaţia (3) rezultă:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{12}^2 R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{R_3}{R_1 R_2}\right)}{R_{12}\left(1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}\right)} \qquad (4)$$

Aducînd la acelaşi numitor şi efectuînd simplificările cuvenite, obţinem:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \qquad (5)$$

Prin operaţii similare sau prin permutări circulare obţinem expresiile şi pentru celelalte rezistenţe:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad (6)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \qquad (7)$$

3.3. Rezistenţele a şi b sînt conectate conform cu figura 3.3.a. Să se determine rezistenţa echivalentă a acestui sistem între punctele A şi B.

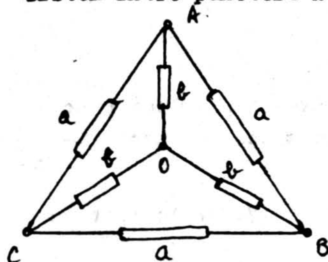


Fig. 3.3.a.

R.: Se transfigurează steaua cu centrul în 0 într-un triunghi, schema echivalentă a circuitului dat este redată în figura 3.3.b.

Unde, conform teoremei Kennely:

$$R_{AC} = R_{CB} = R_{AB} = 3\ b$$

O schemă echivalentă a circuitului din figura 3.3.b este reprezentată în figura 3.3.c.

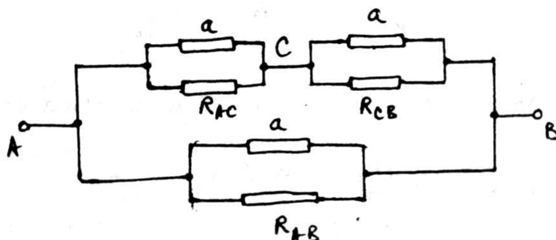


Fig. 3.3.b.

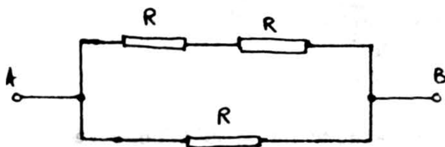


Fig. 3.3.c.

Unde:
$$R = \frac{a \cdot 3b}{a + 3b}$$

Deci rezistenţa echivalentă între punctele A şi B este:

$$R = \frac{R \cdot 2R}{3\ R} = \frac{2}{3}\ R = \frac{2\ ab}{a + 3b}$$

3.4. Să se calculeze curenţii din reţeaua din figura 3.4.a. Se cunosc $E_1 = 6$ V, $E_2 = 4$ V, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$, $r_1 = r_2 = 1\,\Omega$.

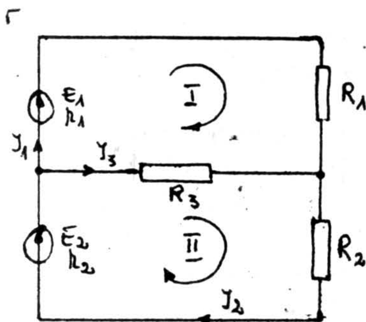


Fig. 3.4.a.

R.: a) folosind legile lui Kirchhoff.

Marcăm arbitrar sensul curenţilor pe laturi, iar apoi alegem un sens de parcurs în cele două ochiuri.

Din prima lege a lui Kirchhoff rezultă că:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad (1)$$

Aplicăm legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile I şi II:

$$I_1(r_1 + R_1) - I_3R_3 = E_1 \qquad (2)$$

$$I_2(r_2 + R_2) + I_3R_3 = E_2 \qquad (3)$$

Folosind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem sistemul de ecuaţii a 3 necunoscute:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$2I_1 \qquad -2I_3 = 3$$

$$3I_2 + 2I_3 = 2$$

Determinantul sistemului este:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$$

Aplicînd regula lui Kramer obţinem:

$$I_1 = \frac{19}{16}\ A$$

$$I_2 = \frac{7}{8}\ A$$

$$I_3 = -\frac{5}{16}\ A$$

Deci curentul prin rezistenţa R_3 are sens contrar celui indicat în figură.

b) folosind principiul superpoziţiei.

Inlocuim reţeaua dată cu două reţele conţinînd fiecare

cîte o singură sursă (fig. 3.4.b. şi 3.4.c.).

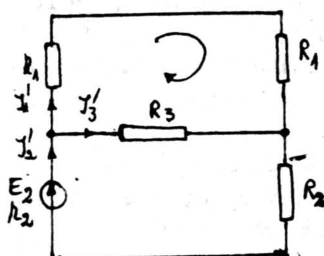


Fig. 3.4.b.

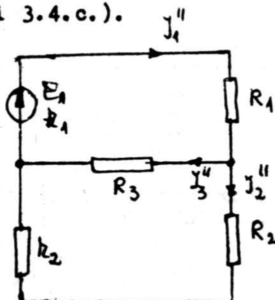


Fig. 3.4.c.

Folosind legea lui Ohm pentru întregul circuit obţinem:

$$I_2' = \frac{E_2}{r_1 + R_2 + \frac{(r_1+R_1)R_3}{r_1+R_1+R_3}}$$

Introducînd valorile numerice obţinem următoarea valoare pentru I_2' :

$$I_2' = \frac{1}{2}\ A$$

Scriind legea întîi a lui Kirchhoff şi legea a doua a lui Kirchhoff

$$I_2' = I_1' + I_3'$$

$$I_1'(r_1+R_1) - I_3'\ R_3 = 0$$

Ţinînd cont de valorile numerice rezultă:

$$I_1' = I_3' = \frac{1}{4}\ A$$

Similar obţinem:

$$I_1'' = \frac{15}{16}\ A \qquad I_2'' = \frac{3}{8}\ A \qquad I_3'' = \frac{9}{16}\ A$$

Insumînd algebric aceşti curenţi obţinem:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{1}{4}\ A + \frac{15}{16}\ A = \frac{19}{16}\ A$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{3}{8}\ A + \frac{1}{2}\ A = \frac{7}{8}\ A$$

$$I_3 = I_3'' - I_3' = \frac{9}{16}\ A - \frac{1}{4}\ A = \frac{5}{16}\ A$$

c) folosind metoda ochiurilor independente (Maxwell).

Se descompune reţeaua în ochiuri independente care sînt parcurse de acelaşi curent şi se numerotează aceste ochiuri (fig.3.4.d.).

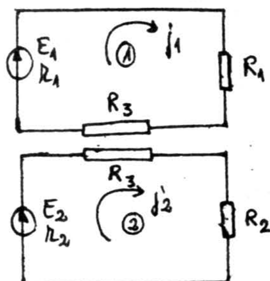


Fig.3.4.d.

Legea lui Ohm generalizată, pentru cele două ochiuri, se scrie:

ochiul 1: $j_1(R_1+r_1)+(j_1-j_2)R_3 = E_1$ (1)

ochiul 2: $j_2(R_2+r_2)+(j_2-j_1)R_3 = E_2$ (2)

Ecuaţii care se pot scrie:

$$j_1(r_1+R_1+R_3)-j_2R_3 = E_1$$
$$-j_1R_3+j_2(R_2+r_2+R_3) = E_2 \qquad (3)$$

unde $r_1+R_1+R_3 = R_{11}$ este rezistenţa totală a ochiului 1, $r_2+R_2+R_3 = R_{22}$ exprimă rezistenţa totală a ochiului 2, iar $-R_3 = R_{12} = R_{21}$ reprezintă rezistenţa comună a ochiurilor 1 şi 2.

Introducînd valorile numerice în (3) rezultă valorile curenţilor j_1 şi j_2:

$$j_1 = \frac{19}{16}\ \text{A} \qquad \text{iar} \qquad j_2 = \frac{7}{8}\ \text{A}$$

Deci curenţii prin laturile reţelei sînt:

$$I_1 = j_1 = \frac{19}{16}\ \text{A}$$

$$I_2 = j_2 = \frac{7}{8}\ \text{A}$$

$$I_3 = j_1 - j_2 = \frac{5}{16}\ \text{A}$$

d) folosind metoda tensiunii între noduri (Millman)

Tensiunea dintre A, B este:

$$U_{BA} = \frac{\dfrac{E_1}{r_1+R_1} - \dfrac{E_2}{r_2+R_2}}{\dfrac{1}{r_1+R_1} + \dfrac{1}{r_2+R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

Inlocuind valorile numerice se obţine:

$$U_{BA} = \frac{5}{4}\ \text{V}$$

Dar $U_{BA} = I_3 R_3$ deci $I_3 = \frac{U_{BA}}{R_3} = \frac{5}{16}$ A

Legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile rețelei:

$$I_1(R_1 + r_1) + U_{BA} = E_1$$

$$I_2(r_2 + R_2) - U_{BA} = E_2$$

Deci curenții I_1 și I_2 sînt:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{BA}}{R_1 + r_1} = \frac{6 - \frac{5}{4}}{4}\ \text{A} = \frac{19}{16}\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{BA}}{r_2 + R_2} = \frac{4 + \frac{5}{4}}{6}\ \text{A} = \frac{7}{8}\ \text{A}$$

e) folosind teorema generatorului de tensiune echivalent (Helmoltz - Thévenin).

Diferența de potențial între punctele A și B înainte de introducerea rezistorului R_3 (folosind teorema lui Millman) este:

$$U'_{BA} = \frac{\frac{E_1}{r_1+R_1} - \frac{E_2}{r_2+R_2}}{\frac{1}{r_1+R_1} + \frac{1}{r_2+R_2}} = \frac{\frac{6}{4} - \frac{4}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 2\ \text{V}$$

Rezistența echivalentă a rețelei între punctele A și B înainte de a introduce rezistorul R_3 este:

$$R_{AB} = \frac{(r_1+R_1)(r_2+R_2)}{r_1+R_1+r_2+R_2} = \frac{4 \cdot 6}{10} = \frac{12}{5}\ \Omega$$

Din teorema Thévenin, curentul I_3 ce trece prin rezistorul R_3 este

$$I_3 = \frac{U'_{BA}}{R_{AB}+R_3} = \frac{2}{\frac{12}{5} + 4} = \frac{5}{16}\ \text{A}$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile rețelei:

$$I_1(R_1+r_1) + I_3 R_3 = E_1$$

$$I_2(r_2+R_2) - I_3 R_3 = E_2$$

rezultă valorile curenţilor I_1 şi I_2:

$$I_1 = \frac{E_1 - I_3R_3}{R_1 + r_1} = \frac{19}{16}\ A$$

$$I_2 = \frac{E_2 + I_3R_3}{r_2 + R_2} = \frac{7}{8}\ A$$

3.5. O sursă de t.e.m. $E = 12$ V şi rezistenţa internă neglijabilă alimentează o punte care are pe diagonala BD o sursă cu t.e.m. $e = 2$ V şi rezistenţă internă neglijabilă. Se cere să se determine curentul în braţul BD. Valorile rezistenţelor rezistoarelor din circuit sînt: $R_1 = 60\Omega$, $R_2 = 120\Omega$, $R_3 = 240\Omega$, $R_4 = 180\Omega$, $R_5 = 90\Omega$.

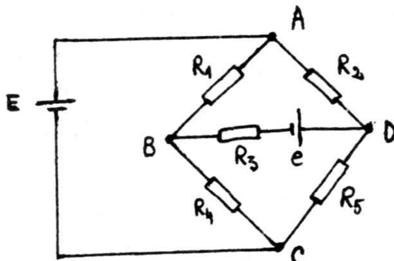


Fig. 3.5.a.

R.: a) folosind legile lui Kirchhoff

Alegem un sens arbitrar de parcurgere a fiecărei laturi, precum şi a ochiurilor alese. Aplicînd legile lui Kirchhoff obţinem sistemul:

nodul B $\quad I_1 - I_3 - I_4 = 0$

nodul D $\quad I_2 + I_3 - I_5 = 0$

nodul A $\quad I_6 - I_1 - I_2 = 0$

ochiul I $\quad I_2R_2 - I_3R_3 - I_1R_1 = -e$

ochiul II $\quad I_1R_1 + I_4R_4 = E$

ochiul III $\quad I_2R_2 + I_5R_5 = E$

Inlocuind valorile numerice obţinem sistemul de 6 ecuaţii cu 6 necunoscute:

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_2 + I_3 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_6 = 0$$

$$30\, I_1 - 60\, I_2 + 120\, I_3 = 1$$

$$5\, I_1 + 15\, I_4 = 1$$

$$20\, I_2 + 15\, I_5 = 2$$

Rezolvînd sistemul obţinem valoarea lui $I_3 = 0,0174$ A.

b) folosind principiul de superpoziţie şi teorema lui Kennely.

Inlocuim reţeaua dată cu 2 reţele conţinînd fiecare cîte o singură sursă (fig. 3.5.b. şi fig. 3.5.c.).

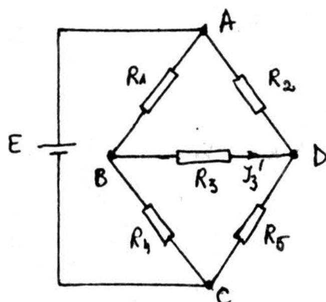


Fig. 3.5.b.

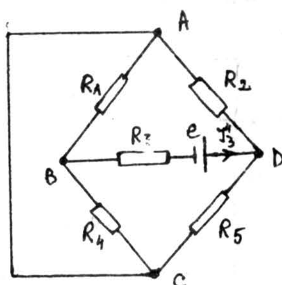


Fig. 3.5.c.

In figura 3.5.b. transfigurăm triunghiul BDC într-o stea pe laturile căreia sînt rezistoarele R_B, R_D şi R_C (fig. 3.5.d).

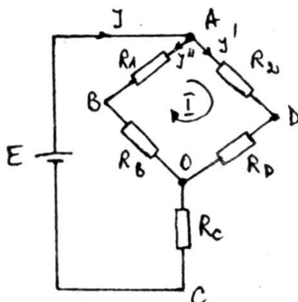


Fig. 3.5.d.

unde

$$R_B = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 84,54\ \Omega$$

$$R_D = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 42,27\ \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 31,7\ \Omega$$

Rezistenţa echivalentă între punctele A şi C este

$$R_{AC} = \frac{(R_2+R_D)(R_1+R_B)}{R_2+R_D+R_1+R_B} + R_C = 108,36\,\Omega$$

curentul prin circuitul principal este:

$$I = \frac{E}{R_{AC}} = 0,111\ A$$

scriind legile lui Kirchhoff pentru nodul A şi pentru ochiul I

nodul A $\quad I = I' + I''$

ochiul I $\quad I'(R_2+R_D) = I''(R_1+R_B)$ deci $\dfrac{I'}{I''} = \dfrac{R_1+R_B}{R_2+R_D}$

Folosind proporţiile derivate rezultă:

$$I' = \frac{I(R_1+R_B)}{R_1+R_B+R_2+R_D} = 0,0523\ A$$

$$I'' = \frac{I(R_2+R_D)}{R_1+R_B+R_2+R_D} = 0,0587\ A$$

Cu ajutorul acestor curenţi putem calcula diferenţa de potenţial între punctele A, D şi A, B:

$$V_A-V_D = I'\ R_2 = 6,276\ V$$

$$V_A-V_B = I''\ R_1 = 3,522\ V$$

Scăzînd aceste relaţii putem determina diferenţa de potenţial între punctele B şi D.

$$V_B-V_D = I'R_2 - I''R_1 = 2,754\ V$$

Deci curentul I_3' se poate calcula

$$I_3' = \frac{V_B-V_D}{R_3} = 0,01147\ A$$

şi este orientat de la punctul B la punctul D, deoarece potenţialul punctului B este mai mare decît potenţialul punctului D.

O schemă electrică echivalentă pentru circuitul din figura 3.5.c. este redată în figura 3.5.e.

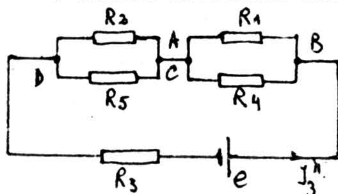


Fig. 3.5.e.

Aplicînd legea lui Ohm pentru întregul circuit rezultă:

$$I_3'' = \frac{e}{R_3 + \frac{R_2 R_5}{R_2+R_5} + \frac{R_1 R_4}{R_1+R_4}} = 0,00595 \text{ A}$$

Curentul ce trece prin ramura BD este

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0,0174 \text{ A}$$

c) folosind metoda ochiurilor independente (Maxwell).

Descompunem rețeaua dată în 3 ochiuri independente, ce sînt parcurse de curenții j_1, j_2, j_3 (fig. 3.5.f). Aplicăm pe fiecare ochi legea lui Ohm generalizată.

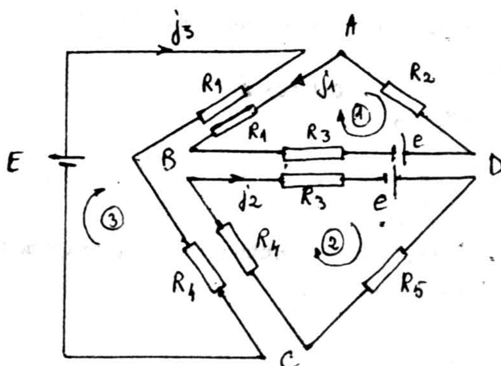


Fig. 3.5.f.

ochiul 1 $\quad R_1(j_1+j_3) + R_2 j_1 + (j_1+j_2) R_3 = -e$

ochiul 2 $\quad R_3(j_2+j_1) + j_2 R_5 + (j_2-j_3) R_4 = e$

ochiul 3 $\quad (j_1+j_3) R_1 + (j_3-j_2) R_4 = E$

Aceste ecuații se pot scrie și sub forma:

$$j_1(R_1+R_2+R_3) + j_2 R_3 + j_3 R_1 = -e$$

$$j_1 R_3 + j_2 (R_3+R_4+R_5) - j_3 R_4 = e$$

$$j_1 R_1 - j_2 R_4 + j_3 (R_1 - R_4) = E$$

unde $R_{11} = R_1 + R_2 + R_3$ este rezistența totală a ochiului 1,

$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$ este rezistența totală a ochiului 2,

$R_{33} = R_1 + R_4$ este rezistența totală a ochiului 3,

$R_{12} = R_{21} = R_3$ este rezistența comună ochiurilor 1 și 2,

$R_{13} = R_{31} = R_1$ este rezistența comună ochiurilor 1 și 3,

$R_{23} = R_{32} = -R_4$ este rezistenţa comună ochiurilor 2 şi 3.

Inlocuind valorile numerice şi rezolvînd sistemul obţinem:

$$j_1 = -\frac{0,8424}{16,956}\ A$$

$$j_2 = \frac{1,137}{16,956}\ A$$

Cu ajutorul curenţilor j_1 şi j_2 se poate determina curentul $I_3 = j_1 + j_2 = 0,0174$ A.

d) folosind teorema lui Thévenin

Rezistenţa echivalentă a circuitului între punctele B şi D înainte de a introduce rezistorul R_3 conform figurii 3.5.g. este:

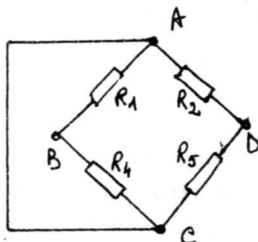


Fig. 3.5.g.

$$R_{BD} = \frac{R_1 R_4}{R_1+R_4} + \frac{R_2 R_5}{R_2+R_5} = 96,42\ \Omega$$

Pentru determinarea diferenţei de potenţial U_{BF} folosim circuitul reprezentat în figura 3.5.h.

Din legea a doua a lui Kirchhoff rezultă:

$$I_2(R_2+R_5) = E \quad \text{deci} \quad I_2 = \frac{E}{R_2+R_5}$$

$$I_1(R_1+R_4) = E \quad \text{deci} \quad I_1 = \frac{E}{R_1+R_4}$$

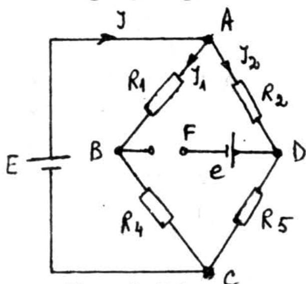


Fig. 3.5.h.

Diferenţa de potenţial între punctele A şi D este

$$V_A - V_D = I_2 R_2 = \frac{E\ R_2}{R_2+R_5} = 6,85\ V$$

Diferenţa de potenţial între punctele A şi B este

$$V_A - V_B = I_1 R_1 = \frac{E\ R_1}{R_1+R_4} = 3\ V$$

Din diferenţa de potenţial între punctele B şi D este

$$V_B - V_D = I_2 R_2 - I_1 R_1 = 3,85\ V$$

Intre punctele B şi F există o diferenţă de potenţial

$$V_B - V_F = V_B - V_D + e = 5{,}85\ V$$

Curentul care trece prin rezistența R_3, conform teoremei Thévenin este:

$$I_3 = \frac{B_B - V_F}{R_{BD} + R_3} = 0{,}0174\ A$$

e) folosind teorema lui Norton

Presupunem scurtcircuitat rezistorul R_3 cu ajutorul întrerupătorului K (figura 3.5.i).

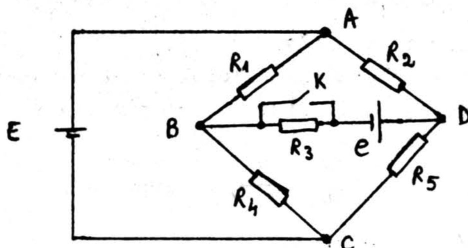


Fig. 3.5.i.

Curentul de scurtcircuit I_{sc} ce trece prin ramura BD se determină cu ajutorul principiului superpoziției (fig. 3.5.j, fig. 3.5.k).

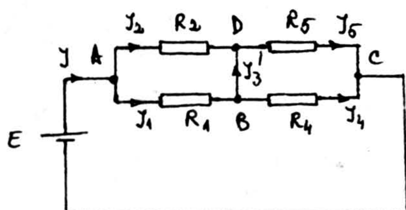


Fig. 3.5.j.

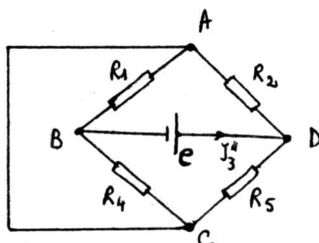


Fig. 3.5.k.

Scriind legea lui Ohm pentru întregul circuit rezultă

$$I = \frac{E}{\dfrac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + \dfrac{R_5 R_4}{R_4 + R_5}} = 0{,}12\ A$$

Scriind legile lui Kirchhoff pentru nodul A și pentru ochiul ADBA: $I = I_1 + I_2$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{obținem} \quad I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = 0{,}04\ A$$

Scriind legile lui Kirchhoff pentru ochiul CDBC şi nodul C:

$$I = I_5 + I_4$$

$$\frac{I_4}{I_5} = \frac{R_5}{R_4} \qquad \text{obţinem} \qquad I_5 = \frac{R_4 I}{R_4 + R_5} = 0{,}08\ A$$

Din prima lege a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul D rezultă valoarea curentului I_3' :

$$I_3' = I_5 - I_2 = 0{,}04\ A$$

In figura 3.5.k se observă că potenţialul punctului A este egal cu potenţialul punctului C, deci

$$I_3'' = \frac{e}{\dfrac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \dfrac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = 0{,}0207\ A$$

Deci curentul de scurtcircuit prin ramura BD este:

$$I_{sc} = I_3' + I_3'' = 0{,}0607\ A$$

Rezistenţa echivalentă a circuitului între punctele B şi D înainte de introducerea rezistorului R_3 este

$$R_{BD} = \frac{R_1\ R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2\ R_5}{R_2 + R_5} = 96{,}42\ \Omega$$

Curentul care trece prin ramura BD, conform teoremei Norton este:

$$I_3 = \frac{R_{BD} \cdot I_{sc}}{R_{AD} + R_3} = \frac{96{,}42 \cdot 0{,}0607}{96{,}42 + 240} = 0{,}0174\ A$$

3.6. Să se afle valorile curenţilor din toate ramurile reţelei din figura 3.6.a., aplicînd metodele:

a) principiul superpoziţiei;

b) descompunerii în ochiuri independente (Maxwell);

c) tensiunii între noduri (Millman).

Valorile numerice ale rezistenţelor şi t.e.m. ce alcătuiesc reţeaua sînt: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $E_1 = 4$ V, $E_2 = 3$ V, $E_3 = 2$ V.

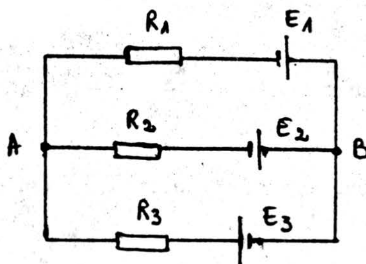


Fig. 3.6.a.

R.: a) Inlocuim reţeaua dată cu trei reţele, ce conţin fiecare o singură t.e.m. (fig. 3.6.b, fig. 3.6.c, fig. 3.6.d).

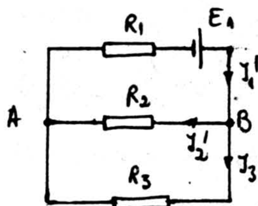


Fig. 3.6.b.

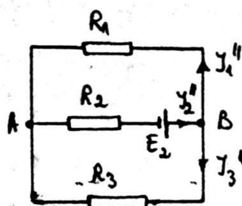


Fig. 3.6.c.

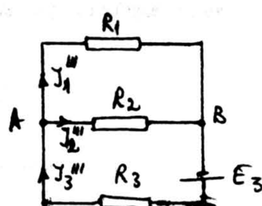


Fig. 3.6.d.

In figura 3.6.b. scriind legea lui Ohm pentru întregul circuit rezultă:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{6}{5}\ A$$

Folosind legile lui Kirchhoff obţinem sistemul

$$I_1' = I_2' + I_3' \qquad \text{deci} \qquad I_2' = \frac{R_3 I_1'}{R_2 + R_3} = \frac{2}{5}\ A$$

$$\frac{I_2'}{I_3'} = \frac{R_3}{R_2} \qquad\qquad I_3' = \frac{R_2\ I_1'}{R_2 + R_3} = \frac{4}{5}\ A$$

Efectuînd aceleaşi operaţii pentru circuitul din figura 3.6.c. obţinem

$$I_1'' = \frac{15}{52}\ A \qquad I_2'' = \frac{15}{26}\ A \qquad I_3'' = \frac{15}{52}\ A$$

Iar pentru circuitul din figura 3.6.d. obţinem

$$I_1''' = \frac{2}{5}\ A \qquad I_2''' = \frac{1}{5}\ A \qquad I_3''' = \frac{3}{5}\ A$$

Curenţii care trec prin laturile reţelei date sînt:

$$I_1 = I_1' + I_1''' - I_1'' = 1,3\ A$$

$$I_2 = I_2'' + I_2''' - I_2' = 0,4\ A$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 1,7\ A$$

b) Constituim 2 ochiuri independente parcurse de curenţii j_1 şi j_2 (fig.3.6.e). Aplicăm pentru fiecare ochi legea lui Ohm generalizată:

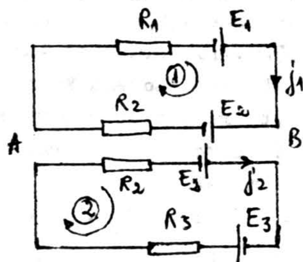


Fig. 3.6.e.

$$R_1 j_1 + R_2(j_1 - j_2) = E_1 - E_2 \quad \text{ochiul (1)}$$

$$R_2(j_2 - j_1) + j_2 R_3 = E_2 + E_3 \quad \text{ochiul (2)}$$

Aceste ecuaţii se pot scrie sub forma:

$$j_1(R_1 + R_2) - R_2 j_2 = E_1 - E_2$$

$$-j_1 R_2 + (R_2 + R_3) j_2 = E_2 + E_3$$

unde $R_1 + R_2 = R_{11}$ este rezistenţa totală a ochiului (1),

$R_2 + R_3 = R_{22}$ este rezistenţa totală a ochiului (2), iar

$-R_2 = R_{12} = R_{21}$ este rezistenţa comună ochiurilor (1) şi (2).

Inlocuind valorile numerice şi rezolvînd sistemul obţinem:

$$j_1 = 1,3\ A \quad \text{şi} \quad j_2 = 1,7\ A$$

Curenţii care trec prin laturile reţelei date sînt:

$$I_1 = j_1 = 1,3\ A$$

$$I_2 = j_2 - j_1 = 0,4\ A$$

$$I_3 = j_2 = 1,7\ A$$

c) Diferenţa de potenţial între punctele A şi B, conform teoremei Millman este dată de relaţia

$$U_{AB} = V_A - V_B = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{7}{5}\ V$$

Scriind legea lui Ohm pe cele 3 ramuri, determinăm

curenţii I_1, I_2, I_3 :

$$I_1R_1 = E_1 - U_{AB} \quad \text{deci} \quad I_1 = \frac{E_1 - I_{AB}}{R_1} = 1,3\ A$$

$$I_2R_2 = E_2 - U_{AB} \quad \text{deci} \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{R_2} = 0,4\ A$$

$$I_3R_3 = E_3 + U_{AB} \quad \text{deci} \quad I_3 = \frac{E_3 + U_{AB}}{R_3} = 1,7\ A$$

3.7. Să se determine intensitatea curenţilor în ramurile circuitului reprezentat în figura 3.7.a. folosindu-se succesiv (a) teorema Kennely, (b) metoda descompunerii în circuite independente (Maxwell).

Se dau: $R_2 = R_3 = 1\Omega$, $R_1 = R_4 = R_6 = R_7 = 2\Omega$, $R_5 = 3\ \Omega$, $E = 1$ V.

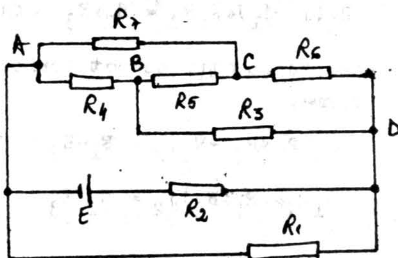


Fig. 3.7.a.

R.: a) Circuitul din problemă se poate reprezenta în următoarea schemă echivalentă (fig.3.7.b.)

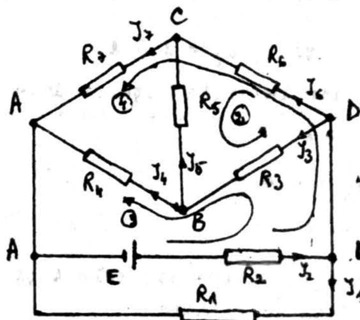


Fig.3.7.b.

Efectuăm o transfigurare triunghi - stea, astfel încît schema echivalentă va fi următoarea (fig.3.7.c), unde conform teoremei Kennely:

$$R_B = R_C = \frac{R_7 \cdot R_5}{R_5 + R_7 + R_4} = \frac{6}{7}\ \Omega$$

$$R_A = \frac{R_7 \cdot R_4}{R_5 + R_7 + R_4} = \frac{4}{7}\ \Omega$$

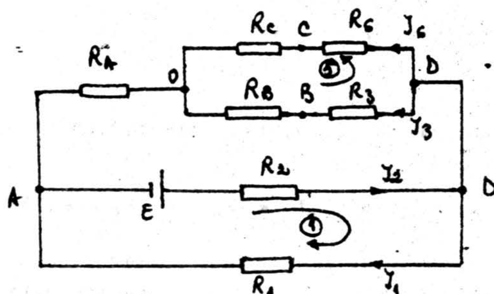


Fig. 3.7.c.

Scriind legea lui Ohm pentru întregul circuit rezultă:

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + \dfrac{R_1\left[R_A + \dfrac{(R_C+R_6)(R_B+R_3)}{R_C+R_6+R_B+R_3}\right]}{R_1+R_A + \dfrac{(R_C+R_6)(R_B+R_3)}{R_C+R_6+R_B+R_3}}} = 0,52\ A$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiul (1) rezultă

$$I_2R_2 + I_1R_1 = E \quad \text{deci} \quad I_1 = \frac{E-I_2R_2}{R_1} = 0,24\ A$$

Cu ajutorul legilor lui Kirchhoff putem obţine următoarele relaţii:

ochiul 3 $\quad I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = E$

ochiul 2 $\quad I_6R_6 - I_3R_3 - I_5R_5 = 0$

ochiul 4 $\quad I_2R_2 + I_6R_6 + I_7R_7 = E$

nodul D $\quad I_3 + I_6 = I_2 - I_1$

nodul A $\quad I_7 + I_4 = I_2 - I_1$

Inlocuind valorile numerice obţinem sistemul:

$$I_3 + 2I_4 = 0,48$$
$$-I_3 - 3I_5 + 2I_6 = 0$$
$$I_6 + I_7 = 0,24$$
$$I_3 + I_6 = 0,28$$
$$I_4 + I_7 = 0,28$$

Rezolvînd sistemul rezultă următoarele valori pentru curenţii din reţea:

$I_3 = 0,17$ A $I_4 = 0,15$ A $I_5 = 0,02$ A $I_6 = 0,11$ A $I_7 = 0,13$ A

Aceşti curenţi se pot afla mai uşor şi astfel:

- se scriu legile lui Kirchhoff pentru ochiul 5 şi nodul D

$$\frac{I_6}{I_3} = \frac{R_B+R_3}{R_C+R_6}$$

$$I_6 + I_3 = I_2 - I_1$$

- folosind proporţiile derivate rezultă

$$I_6 = \frac{(R_B+R_3)(I_2-I_1)}{R_B+R_3+R_C+R_6} = 0,11 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{(R_C+R_6)(I_2-I_1)}{R_B+R_3+R_C+R_6} = 0,17 \text{ A}$$

- din legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiul (2) rezultă

$$I_5 = \frac{I_6R_6 - I_3R_3}{R_5} = 0,02 \text{ A}$$

- din prima lege a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul C rezultă

$$I_7 = I_5 + I_6 = 0,13 \text{ A}$$

- din prima lege a lui Kirchhoff pentru nodul A rezultă

$$I_4 = I_2 - I_1 - I_7 = 0,15 \text{ A}$$

b) In locul circuitului dat folosim patru ochiuri independente parcurse de curenţii j_1, j_2, j_3 şi j_4 (fig.3.7.d).

In fiecare ochi se scrie legea lui Ohm generalizată:

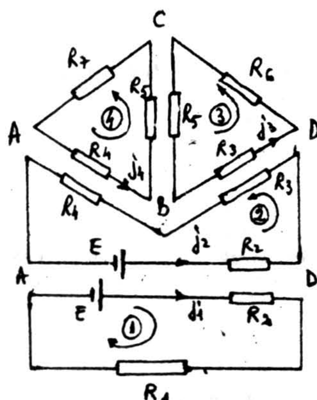


Fig. 3.7.d.

ochiul (1)

$$R_1j_1 + R_2(j_1+j_2) = E$$

ochiul (2)

$$R_2(j_1+j_2)+R_3(j_2-j_3)+R_4(j_2-j_4)=E$$

ochiul (3)

$$R_3(j_3-j_2)+R_6j_3+R_5(j_3-j_4) = 0$$

ochiul (4)

$$R_4(j_4-j_2)+R_5(j_4-j_3)+R_7j_4 = 0$$

Scriind sub altă formă aceste ecuaţii obţinem:

$$j_1(R_1+R_2)+j_2R_2 = E$$

$$j_1R_2+j_2(R_2+R_3+R_4)-j_3R_3-j_4R_4 = E$$

$$-j_2R_3+j_3(R_3+R_5+R_6)-j_4R_5 = 0$$

$$-j_2R_4-j_3R_5+j_4(R_4+R_5+R_7) = 0$$

Inlocuind valorile numerice obţinem următorul sistem algebric de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute:

$$3\,j_1 + j_2 = 1$$

$$j_1 + 4\,j_2 - j_3 - 2\,j_4 = 1$$

$$-j_2 + 6\,j_3 - 3\,j_4 = 0$$

$$-2\,j_2 - 3\,j_3 + 7\,j_4 = 0$$

Rezolvînd acest sistem obţinem

$j_1 = 0,24$ A $\quad j_2 = 0,28$ A $\quad j_3 = 0,11$ A $\quad j_4 = 0,13$ A

Curenţii care trec prin laturile circuitului dat sînt:

$I_1 = j_1 = 0,24$ A $\quad I_4 = j_2-j_4 = 0,15$ A

$I_2 = j_1+j_2 = 0,52$ A $\quad I_5 = j_4-j_3 = 0,02$ A $\quad I_7 = j_4 = 0,13$ A

$I_3 = j_2-j_3 = 0,17$ A $\quad I_6 = j_3 = 0,11$ A

3.8. Aplicînd teorema lui Thévenin, să se determine curentul în rezistenţa $R = 11,3\,\Omega$ dacă $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 0,5\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$ şi $E = 1,25$ V, rezistenţa sursei fiind neglijabilă.

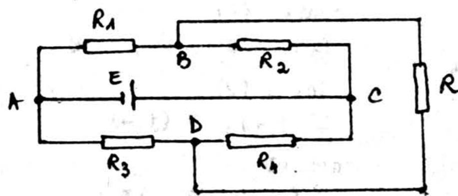


Fig. 3.8.a.

R.: O schemă electrică echivalentă este următoarea:

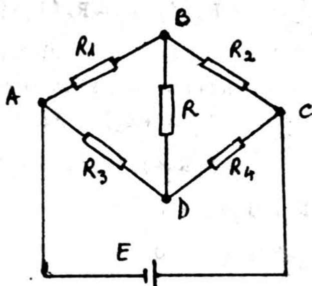


Fig. 3.8.b.

Rezistenţa echivalentă între punctele B şi D înainte de a introduce rezistorul R (fig. 3.8.c) este:

$$R_{BD} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{BD} = \frac{6}{5}\ \Omega$$

Fig. 3.8.c.

Diferenţa de potenţial între punctele B şi D înainte de a introduce rezistorul R se calculează cu ajutorul schemei (fig. 3.8.d).

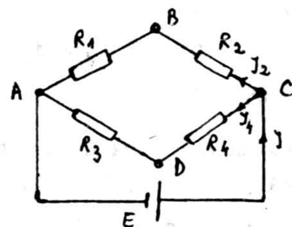


Fig. 3.8.d.

Din legea lui Ohm pentru întregul circuit rezultă:

$$I = \frac{E(R_1+R_2+R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = 0{,}75\ A$$

Cei doi curenţi I_2 şi I_4 se obţin din legile lui Korchhoff

nodul C $\quad I = I_2 + I_1$

ochiul CDABC $\quad I_2(R_2+R_1)=I_4(R_3+R_4)$

deci

$$I_2 = \frac{(R_3+R_4)I}{R_1+R_2+R_3+R_4} = 0,5\ A \qquad I_4 = \frac{(R_1+R_2)I}{R_1+R_2+R_3+R_4} = 0,25\ A$$

Diferenţele de potenţial între punctele B şi C, precum şi între D şi C sînt:

$$V_C - V_B = I_2 R_2 = 0,25\ V$$

$$V_C - V_D = I_4 R_4 = 1\ V$$

Deci

$$V_B - V_D = I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0,75\ V$$

Curentul care trece prin latura BD este conform teoremei Thévenin

$$I = \frac{V_B - V_D}{R_{BD} + R} = 0,06\ A$$

Acest curent parcurge latura BD de la B spre D.

3.9. Se consideră reţeaua din figura 3.9.a., în care $E_1 = 18$ V, $E_2 = 45$ V, $E_3 = 150$ V, $r_1 = 3\ \Omega$, $r_2 = 1,5\ \Omega$, $r_3 = 5\ \Omega$, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$. Să se calculeze, prin aplicarea teoremei Thévenin, curentul ce trece prin R_2.

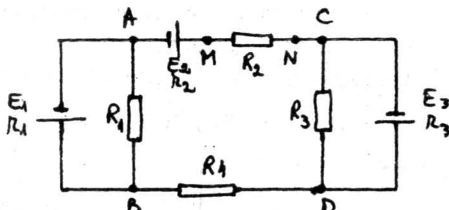


Fig. 3.9.a.

R.: Rezistenţa echivalentă a circuitului înainte de introducerea rezistorului R_2 (fig. 3.9.b) este:

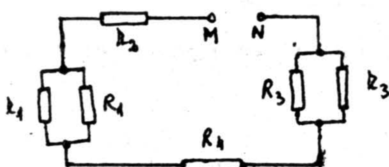


Fig. 3.9.b.

$$R_{MN} = r_2 + R_4 + \frac{r_3 R_3}{r_3 + R_3} + \frac{r_1 R_1}{r_1 + R_1} = 8\ \Omega$$

Diferenţa de potenţial între punctele A şi B se poate afla uşor aplicînd teorema Millman:

$$V_B - V_A = \frac{\frac{E_1}{r_1}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{E_1 R_1}{r_1 + R_1}$$

Aplicînd aceeaşi teoremă se poate calcula uşor diferenţa de potenţial între punctele C şi D:

$$V_D - V_C = \frac{\frac{E_3}{r_3}}{\frac{1}{r_3} + \frac{1}{R_3}} = \frac{E_3 R_3}{r_3 + R_3}$$

Deci, diferenţa de potenţial între punctele M şi N, înainte de a conecta rezistorul R_2 este

$$V_M - V_N = \frac{E_3\ R_3}{r_3 + R_3} - \frac{E_1\ R_1}{r_1 + R_1} + E_2 = 108\ V$$

Curentul de trece prin rezistorul R_2 este

$$I_2 = \frac{V_M - V_N}{R_{MN} + R_2} = 9\ A$$

şi circulă de la M la N.

3.10. Să se calculeze căderea de tensiune pe rezistorul R_3 din reţeaua reprezentată în figura 3.10.a, folosind (a) teorema lui Millman şi (b) teorema lui Norton. Se dă $E_1 = 25$ V, $E_2 = 10$ V, $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_4 = 10\,\Omega$.

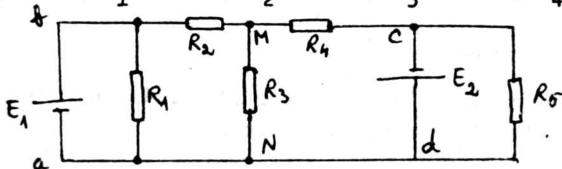


Fig. 3.10.a.

R.: a) Se scrie teorema lui Milliman pentru nodurile M şi N

$$U_{NM} = \frac{\frac{E_2}{R_4} - \frac{E_1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}} = 3{,}45\ V$$

b) Rezistența echivalentă a circuitului înainte de introducerea rezistorului R_3 este

$$R_{MN} = \frac{(R_1+R_2)(R_4+R_5)}{R_1+R_2+R_4+R_5} = \frac{50}{6}$$

Curentul de scurtcircuit între punctele M și N se determină cu ajutorul principiului superpoziției (fig.3.10.b și fig. 3.10.c):

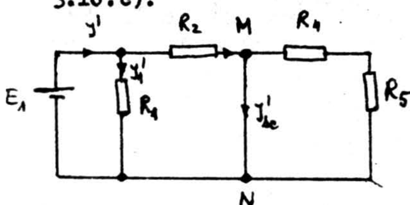


Fig.3.10.b.

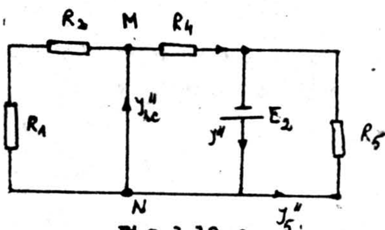


Fig.3.10.c.

Folosind legile lui Kirchhoff rezultă:

$$I' = \frac{E_1(R_1+R_2)}{R_1R_2} = \frac{7}{4}\ A$$

$$I_1' + I_{sc}' = I' \qquad \text{deci} \qquad I_{sc}' = \frac{R_1 I'}{R_1+R_2} = \frac{E_1}{R_2} = 0{,}5\ A$$

$$I_1' R_1 = I_{sc}' R_2$$

Similar

$$I_{sc}'' = \frac{E_2}{R_4} = 1\ A$$

Curentul de scurtcircuit între punctele M și N este

$I_{sc} = I_{sc}'' - I_{sc}' = 0{,}5\ A$ (circulă de la N la M)

Căderea de tensiune pe rezistorul R_3, conform teoremei lui Norton, este:

$$U_{NM} = \frac{R_3 \cdot R_{MN} \cdot I_{sc}}{R_{MN} + R_3} = 3{,}45\ V$$

3.11. Să se calculeze tensiunea U_{AB} în rețeaua din figura 3.11.a. prin aplicarea (a) teoremei lui Millman și (b) teoremei lui Norton. Se dă: $E_1 = 2$ V, $E_2 = 10$ V, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$.

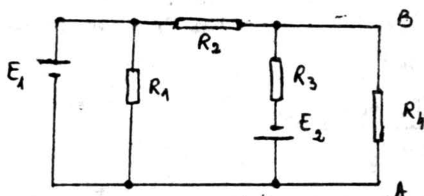


Fig. 3.11.a.

R.: a) Conform teoremei lui Millman, diferenţa de potenţial între punctele A şi B are următoarea expresie:

$$U_{AB} = \frac{\frac{E_2}{R_3} - \frac{E_1}{R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = 2,35 \text{ V}$$

b) Rezistenţa echivalentă a circuitului între punctele B şi A înainte de conectarea rezistorului R_4 este:

$$R_{AB} = \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{10}{7} \ \Omega$$

Curentul de scurtcircuit între punctele A şi B se determină cu ajutorul principiului superpoziţiei (fig. 3.11.b şi fig. 3.11.c).

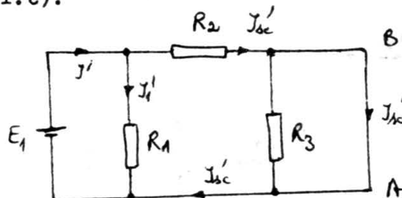


Fig. 3.11.b.

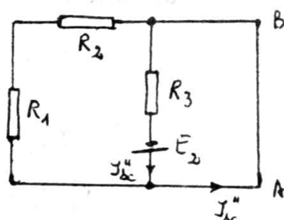


Fig. 3.11.c.

Din legile lui Kirchhoff rezultă :

$$I' = \frac{E_1(R_1+R_2)}{R_1 \ R_2}$$

$$I'_1 + I'_{sc} = I' \qquad \text{deci} \qquad I'_{sc} = \frac{R_1 \ I'}{R_1+R_2} = \frac{E_1}{R_2} = 0,4 \text{ A}$$

$$I'_1 \ R_1 = R_2 \ I'_{sc}$$

Din figura 3.11.c se observă că

$$I''_{sc} = \frac{E_2}{R_3} = 5 \text{ A}$$

Deci curentul de scurtcircuit între punctele A şi B este

$$I_{sc} = I''_{sc} - I'_{sc} = 4,6 \text{ A}$$

Tensiunea U_{AB} în circuitul dat, conform teoremei Norton, este dată de expresia:

$$U_{AB} = \frac{R_4\, R_{AB} \cdot I_{sc}}{R_4 + R_{AB}} = 2{,}35\ V$$

3.12. Presupunem n elemente galvanice identice de t.e.m. E şi rezistenţă internă r, aşezate ca în figura 3.12; numărul, acelaşi de elemente dispuse în serie în fiecare ramură fiind $\frac{n}{x}$. Care este relaţia între n, r şi R pentru ca intensitatea curentului prin rezistenţa exterioară R_e să fie maximă?

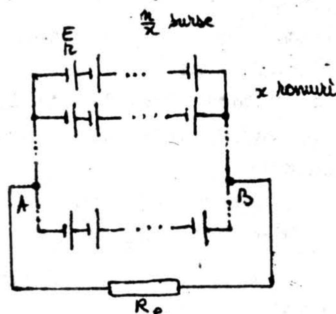


Fig.3.12.

R.: Pe fiecare din cele x ramuri, dispuse în paralel, se găsesc $\frac{n}{x}$ surse identice; ce pot fi înlocuite cu o sursă echivalentă de t.e.m. $\frac{n}{x}$ E şi rezistenţă internă $\frac{n}{x}$ r.

Aplicăm teorema Millman pentru a determina tensiunea electrică între punctele A şi B

$$U_{AB} = \frac{x \cdot \frac{nE}{x} / \frac{nr}{x}}{x \cdot \frac{1}{nr/x} + \frac{1}{R_e}} = \frac{n\ x\ E\ R_e}{x^2 R_e + n\ r}$$

Curentul ce trece prin rezistenţa R_e este

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{n\ x\ E}{x^2 R_e + n\ r}$$

Condiţia ca intensitatea curentului prin rezistenţa exterioară R_e să fie maximă, este ca prima derivată a lui I în raport cu x să fie nulă:

$$\frac{dI}{dx} = 0 \qquad \text{deci} \qquad n\ r = x^2 R_e \qquad \text{sau} \qquad x = \sqrt{\frac{nr}{R_e}}$$

Deci raportul dintre numărul de elemente în serie $\frac{n}{x}$ şi numărul de ramuri x este egal cu raportul dintre rezistenţa externă şi rezistenţa internă. Dacă cele două rezistenţe sînt egale, atunci numărul de elemente în serie de pe o ramură este egal cu numărul de ramuri.

3.13. O punte Wheatstone (figura 3.13.a) este alimentată cu curent continuu de la o sursă de 2,2 V, avînd rezistența proprie neglijabilă. Ca instrument de zero se folosește un galvanometru cu rezistența internă 60Ω. Să se calculeze care este intensitatea curentului în galvanometru în cazul dezechilibrului, folosindu-se următoarele metode:

a) metoda transfigurării;

b) metoda ochiurilor independente;

c) teorema Thévenin.

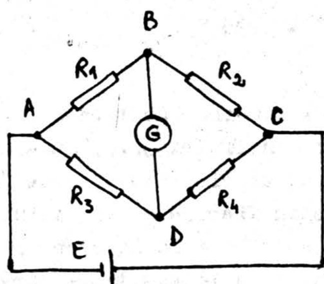


Fig.3.13.a.

Se dau: $R_1 = 30\,\Omega$, $R_2 = 22\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$.

R.: a) Transformînd triunghiul ABD într-o stea, obținem următoarea schemă echivalentă (fig.3.13.b).

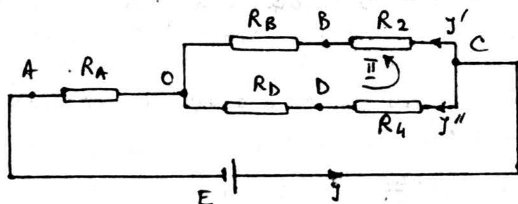


Fig.3.13.b.

unde $R_A = \dfrac{R_1 R_3}{R_1+R_3+R_G} = 3\,\Omega$ $\qquad R_B = \dfrac{R_1 R_G}{R_1+R_3+R_G} = 18\,\Omega$

$$R_D = \frac{R_3 R_G}{R_1+R_3+R_G} = 6\,\Omega$$

Curentul I prin circuit este

$$I = \frac{E}{R_A + \dfrac{(R_B+R_2)(R_D+R_4)}{R_B+R_2+R_D+R_4}} = 0,2\ A$$

Curenții ce străbat ramurile CBO și CDO, I' și respectiv I" se află cu legile lui Kirchhoff ;

ochiul I $\quad I'(R_B+R_2) = I''(R_D+R_4)$

nodul C $\quad I = I' + I''$ $\quad$ deci $\quad I' = I\dfrac{R_D + R_4}{R_B+R_2+R_D+R_4} = 0{,}04A$

$$I'' = I\frac{R_B+R_2}{R_B+R_2+R_D+R_4} = 0{,}16\ A$$

Diferența de potențial între punctele C și B este:

$$V_C - V_B = I'R_2 = 0{,}88\ V$$

iar între punctele C și D este:

$$V_C - V_D = I''R_4 = 0{,}64\ V$$

Deci diferența de potențial între punctele D și B este:

$$V_D - V_B = I'R_2 - I''R_4 = 0{,}24\ V$$

Curentul I_G ce trece prin galvanometru se obține astfel:

$$I_G = \frac{V_D-V_B}{R_G} = \frac{0{,}24}{60}\ A = 4\ mA$$

b) Constituim 3 ochiuri independente, parcurse de curenții j_1, j_2 și j_3 (fig. 3.13.c).

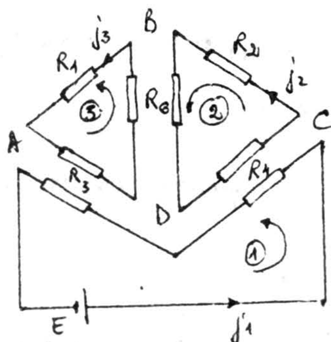


Fig. 3.13.c.

In cele 3 ochiuri scriem legea lui Ohm generalizată:

ochiul 1 :

$(j_1-j_2)R_4+(j_1-j_3)R_3 = E$

ochiul 2 :

$(j_2-j_1)R_4+j_2R_2+(j_2-j_3)R_G = 0$

ochiul 3 :

$(j_3-j_1)R_3+(j_3-j_2)R_G+j_3R_1 = 0$

Deci:

$$(R_3+R_4)\ j_1 - R_4j_2 - R_3j_3 = E$$
$$-R_4j_1 + (R_4 + R_2 + R_G)j_2 - R_G\ j_3 = 0$$
$$-R_3j_1 - R_Gj_2 + (R_3 + R_1 + R_G)j_3 = 0$$

Inlocuind valorile numerice se obține sistemul:

$$7\ j_1 - 2\ j_2 - 5\ j_3 = 1{,}1$$
$$-2\ j_1 + 43\ j_2 - 30\ j_3 = 0$$
$$-\ j_1 - 6\ j_2 + 10\ j_3 = 0$$

ce are soluţiile: $j_1 = 0,2$ A $\quad j_2 = 0,04$ A $\quad j_3 = 0,044$ A

Curentul ce trece prin galvanometru este

$$I_G = j_3 - j_2 = 0,004 \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

c) Rezistenţa echivalentă între punctele B şi D, înainte de introducerea galvanometrului este:

$$R_{DB} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1415}{91}\ \Omega$$

Curentul total, ce trece prin circuit înainte de conectarea galvanometrului este

$$I = \frac{E(R_1+R_2+R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} = \frac{36,3}{182}\ \text{A}$$

Diferenţa de potenţial între punctele C şi B este :

$$V_C - V_B = R_2\, I\, \frac{R_3 + R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

iar între punctele C şi D este

$$V_C - V_D = R_4\, I_{DC} = \frac{R_1 + R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4}\, R_4 I$$

Scăzînd cele două tensiuni U_{CB} şi U_{CD} obţinem U_{DB}

$$U_{DB} = \frac{I(R_2R_3 - R_1R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4} = \frac{55}{182}\ \text{V}$$

Curentul ce trece prin galvanometru, conform teoremei Thévenin este:

$$I_G = \frac{U_{DB}}{R_{DB} + R_G} = 0,004 \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

3.14. Rezistenţele R_1, R_2, R_3 şi R_4 formează circuitul din figura 3.14. Cunoscînd că $R_1 = 9\ \Omega$, $R_4 = \Omega$ şi $E = 120$ V, să se determine rezistenţele R_2 şi R_3 egale între ele, astfel încît curentul I_1 prin bobină să aibă valoarea maximă.

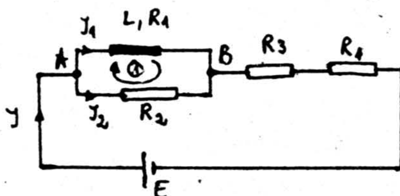


Fig. 3.14.

R.: Curentul total prin circuit este:

$$I = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + R_2 + R_4}$$

Curenţii I_1 şi I_2 se determină cu ajutorul legilor lui Kirchhoff:

ochiul 1 : $I_1R_1 = I_2R_2$

nodul A : $I = I_1 + I_2$

deci $I_1 = \frac{R_2 I}{R_1+R_2} = \frac{E R_2}{R_1R_2+(R_2+R_4)(R_1+R_2)}$

Inlocuind valorile numerice obţinem:

$$I_1 = \frac{120 R_2}{R_2^2+22 R_2+36}$$

Condiţia ca curentul I_1 să fie maxim este ca prima derivată a lui I_1 în raport cu R_2 să fie zero:

$$\frac{dI_1}{dR_2} = \frac{120(R_2^2+22 R_2+36)-(2 R_2+22)\cdot 120 R_2}{(R_2^2+22 R_2+36)^2} = 0$$

Soluţia acestei ecuaţii este $R_2 = 6\Omega$.

3.15. In schema potenţiometrului de la figura 3.15, t.e.m. a bateriei E este de aproximativ 3 V, iar rezistenţa internă este necunoscută. Pila E_o este un element etalon Weston (1,018 V). Intrerupătorul K fiind închis pe poziţia 01, galvanometrul G indică diviziunea zero cînd cursorul este în punctul B, BC reprezentînd 0,36 din rezistenţa AC.

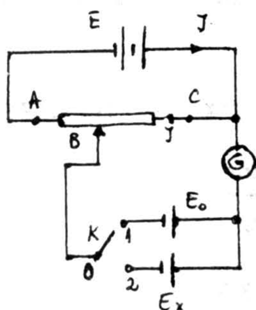


Fig.3.15.

a) Care este, în acest caz, diferenţa de potenţial V_{AC} ?

b) Intrerupătorul fiind pe poziţia 02, galvanometrul indică zero pentru o poziţie B ce reprezintă 0,47 din rezistenţa AC. Care este valoarea t.e.m. E_x?

R.: a) Deoarece prin galvanometru nu trece curent (el indică diviziunea zero) înseamnă că diferenţa de potenţial între punctele C şi B este E_o, $U_{CB} = E_o$ (1)

Dar această diferenţă de potenţial conform legii lui Ohm pentru o porţiune de circuit este

$$U_{CB} = I \cdot R_{CB} = I\, k_1 R_{AC} \qquad (2)$$

Curentul I ce trece prin circuitul bateriei este:

$$I = \frac{E}{R + R_{AC}} \qquad (3)$$

unde R este rezistenţa bateriei.

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă

$$\frac{E\, k_1}{E_o} = \frac{R_{AC} + R}{R_{AC}}$$

Din proporţii derivate rezultă:

$$R = \frac{R_{AC}}{E_o}\,(E\, k_1 - E_o)$$

Folosind teorema lui Millman:

$$U_{AC} = \frac{\frac{E}{R} + \frac{E_o}{(1-k_1)R_{AC}}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{(1-k_1)R_{AC}}} = E_o\,\frac{(1-k_1)R_{AC}E + R_{AC}(Ek_1 - E_o)}{E_o(1-k_1)R_{AC} + R_{AC}(Ek_1 - E_o)} = \frac{E_o}{k_1}$$

$$U_{AC} = 2{,}827\ \text{V}$$

b) Deoarece galvanometrul indică zero pentru o poziţie B' rezultă că

$$\frac{Ek_2}{E_x} = \frac{R_{AC} + R}{R_{AC}} = \frac{Ek_1}{E_o}$$

deci

$$E_x = E_o\,\frac{k_2}{k_1} = 1{,}33\ \text{V}$$

3.16. Se consideră montajul punţii duble Kelvin din figura 3.16.a, în care $Q = 1000\,\Omega$, $S = 2000\,\Omega$, $\alpha = 100\,\Omega$, $\beta = 200\,\Omega$, $\gamma = 1\,\Omega$, rezistenţa de măsurat $P = 0,3\,\Omega$, iar rezistenţa variabilă $R = 0,5\,\Omega$, $E = 10$ V, rezistenţa internă a sursei avînd o valoare neglijabilă. Să se calculeze intensitatea curentului care trece prin galvanometrul G care are rezistenţa $R_G = 5000\,\Omega$.

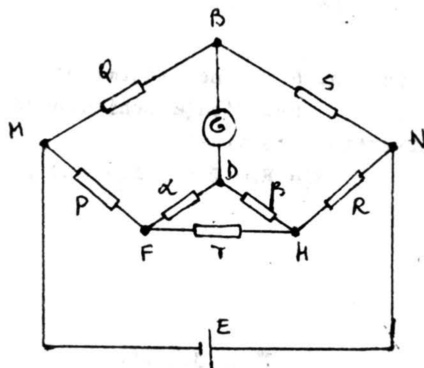


Fig. 3.16.a.

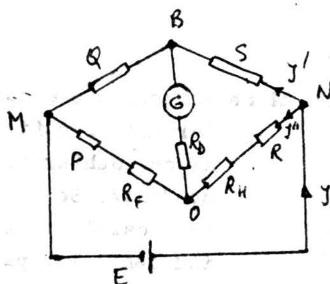


Fig. 3.16.b.

R.: Această problemă se rezolvă cel mai uşor dacă se transformă puntea dublă într-o punte Wheatstone. Pentru aceasta se transfigurează triunghiul DFH într-o stea (fig. 3.16.b), unde rezistenţele R_F, R_D şi R_H sînt conform teoremei Kennely

$$R_F = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad R_H = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$R_D = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

In continuare se aplică teorema Thévenin.

Rezistenţa echivalentă înainte de introducerea galvanometrului este

$$R_{BD} = \frac{QS}{Q+S} + \frac{(P+R_F)(R_H+R)}{P+R_F+R_H+R}$$

Curentul total înainte de conectarea galvanometrului este:

$$I = \frac{E(Q+S+P+R_F+R_H+R)}{(Q+S)(P+R_F+R_H+R)}$$

iar curenţii I' şi I" sînt conform legilor lui Kirchhoff

$$I' = \frac{I(R+R_H+R_F+P)}{Q+S+P+R_F+R_H+R} = \frac{E}{Q+S}$$

$$I'' = \frac{E}{P+R_F+R_H+R}$$

Diferenţa de potenţial între punctele B şi D este:

$$V_B-V_D = V_N-V_D-(V_N-V_B) = I''(R+R_H)-I'S = E\left(\frac{R+R_H}{R+R_H+R_F+P} - \frac{S}{S+Q}\right)$$

Curentul ce trece prin galvanometrul, conform teoremei Thévenin este:

$$I_G = \frac{V_B - V_D}{R_G + R_D + R_{BD}} = 37{,}1\ \mu A$$

3.17. Se dă circuitul din figură. Să se determine: (a) curenţii din laturile reţelei, (b) rezistenţa echivalentă între punctele A şi B pentru circuitul pasivizat.

Se cunosc: $R_1 = R_4 = R_5 = 4\,\Omega$, $R_2 = R_6 = 2\,\Omega$, $R_3 = 8\,\Omega$, $E_3 = 5$ V, $E_5 = 20$ V, $E_6 = 10$ V.

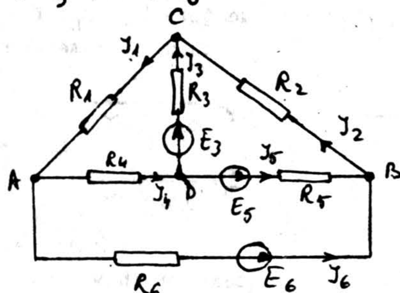


Fig. 3.17.a.

R.: a) Metoda cea mai directă de determinare a curenţilor din circuit este metoda ochiurilor independente. Se constituie următoarele trei ochiuri independente, parcurse de curenţii j_1, j_2 şi j_3 (fig. 3.17.b).

Fig. 3.17.b.

Conform legii lui Ohm generalizată avem:

ochiul 1:

$$R_3(j_1 - j_2) + R_1 j_1 + R_4(j_1 + j_3) = E_3$$

ochiul 2: $R_2 j_2 + R_3(j_2 - j_1) + R_5(j_2 + j_3) = E_5 - E_3$

ochiul 3: $R_4(j_1 + j_3) + R_5(j_2 + j_3) + R_6 j_3 = E_5 - E_6$

sau:

$$j_1(R_1 + R_3 + R_4) - j_2 R_3 + j_3 R_4 = E_3$$

$$-j_1 R_3 + j_2(R_2 + R_3 + R_5) + j_3 R_5 = E_5 - E_3$$

$$j_1 R_4 + j_2 R_5 + j_3(R_4 + R_5 + R_6) = E_5 - E_6$$

Inlocuind valorile numerice obţinem sistemul:

$$16\ j_1 - 8\ j_2 + 4\ j_3 = 5$$
$$-8\ j_1 + 14\ j_2 + 4\ j_3 = 15 \quad \text{care are soluţiile} \quad j_1 = \frac{5\cdot 59}{8\cdot 27}\ A$$
$$2\ j_1 + 2\ j_2 + 5\ j_3 = 5 \qquad j_2 = \frac{10}{9}\ A \qquad j_3 = -\frac{35}{27\cdot 4}\ A$$

Curenţii ce trec prin ramurile circuitului dat sînt:

$$I_1 = j_1 = \frac{295}{8\cdot 27}\ A \qquad I_2 = j_2 = \frac{10}{9}\ A \qquad I_3 = j_1 - j_2 = \frac{55}{8\cdot 27}\ A$$

$$I_4 = j_1 + j_3 = \frac{225}{8\cdot 27} \qquad I_6 = -j_3 = \frac{35}{27\cdot 4}\ A \qquad I_5 = j_2 + j_3 = \frac{85}{27\cdot 4}\ A$$

b) Pentru calculul rezistenţei echivalente, între punctele A şi B ale circuitului pasivizat, ţinem cont de următoarea schemă (fig.3.17.c).

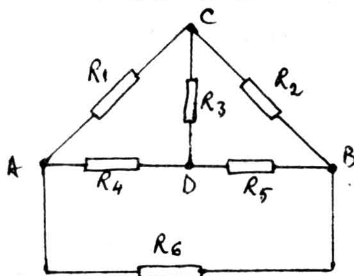


Fig.3.17.c.

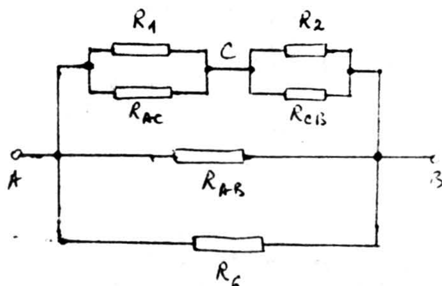


Fig.3.17.d.

Se transfigurează steaua cu centrul în D într-un triunghi (fig.3.17.d).

Unde valorile rezistorilor R_{AC}, R_{CB} şi R_{AB} se obţin cu ajutorul teoremei Kennely:

$$R_{AC} = R_4 + R_3 + \frac{R_4 R_3}{R_5} = 20\ \Omega \qquad R_{CB} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_4} = 20\ \Omega$$

$$R_{AB} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_3} = 10\ \Omega$$

Notînd cu R_C rezistenţa echivalentă de pe prima ramură a figurii 3.17.d.

$$R_C = \frac{R_1 R_{AC}}{R_1 + R_{AC}} + \frac{R_2 R_{CB}}{R_2 + R_{CB}} = \frac{170}{33}\ \Omega$$

putem scrie următoarea relaţie pentru rezistenţa echivalentă R_e

între punctele A şi B:

$$R_e = \frac{R_C \cdot R_{AB} \cdot R_6}{R_C \cdot R_{AB} + R_C \cdot R_6 + R_6 \cdot R_{AB}} = \frac{34}{27}\,\Omega$$

3.18. Montajul din figura 3.18.a este compus din rezistori ai căror valori sînt b, c, d, g, R şi un generator de t.e.m. E şi rezistenţă interioară a. Folosind teoremele lui Thévenin şi Kennely să se demonstreze că, curentul i este dat de relaţia:

$$i = \frac{E\left[R(c+d) + c(b+d)\right]}{R\left[g(a+b+c+d)+(a+b)(c+d)\right]+g(a+c)(b+d)+abcd(1/a+1/b+1/c+1/d)}$$

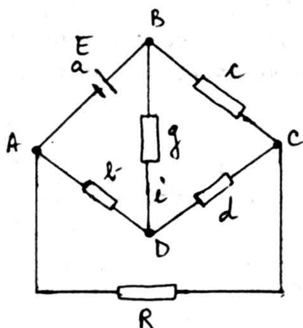


Fig. 3.18.a.

R.:Rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat, între punctele B şi D, înainte de introducerea rezistorului cu rezistenţa egală cu g, se determină cu ajutorul schemei din figura 3.18.b.

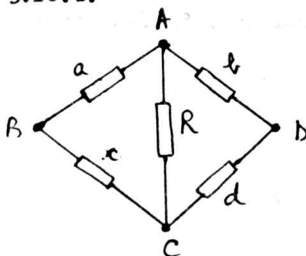


Fig. 3.18.b.

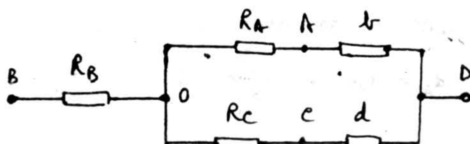


Fig. 3.18.c.

Se transfigurează triunghiul ABC într-o stea (figura 3.18.c). Unde expresiile lui R_A, R_B şi R_C sînt determinate cu ajutorul teoremei Kennely:

$$R_A = \frac{aR}{d+c+R} \qquad R_B = \frac{ac}{a+c+R} \qquad R_C = \frac{cR}{a+c+R}$$

Deci rezistența echivalentă între punctele B și D este

$$R_e = R_B + \frac{(b+R_A)(d+R_c)}{b+R_A+d+R_c} = \frac{ac}{a+c+R} +$$

$$+ \frac{\left[b(a+c+R) + aR\right]\left[d(a+c+R) + cR\right]}{(a+c+R)\left[b(a+c+R)+aR+cR+d(a+c+R)\right]}$$

Pentru determinarea diferenței de potențial între punctele B și D folosim schema din figura 3.18.d.

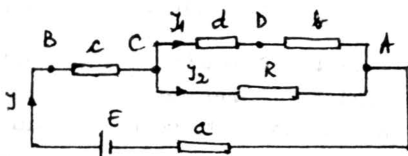


Fig. 3.18.d.

Curenții care trec prin ramurile acestui circuit sînt:

$$I = \frac{E}{a+c+\frac{(d+b)R}{d+b+R}} = \frac{E(d+b+R)}{(a+c)(d+b) + R(d+b+a+c)}$$

$$I_1 = I\,\frac{R}{R+d+b} = \frac{E\,R}{(a+c)(d+b) + R(a+b+c+d)}$$

Pentru determinarea diferenței de potențial $V_B - V_D$ determinăm mai întîi diferențele de potențial $V_B - V_C$ și $V_C - V_D$

$$V_B - V_C = I\,c = \frac{E\,c(d+b+R)}{(a+c)(d+b) + R(a+b+c+d)}$$

$$V_C - V_D = I_1 d = \frac{E\,R\,d}{(a+c)(d+b) + R(a+b+c+d)}$$

Deci diferența de potențial $V_B - V_D$ este

$$V_B - V_D = (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = \frac{E\left[R(c+d)+c(d+b)\right]}{(a+c)(d+b) + R(a+b+c+d)}$$

Conform teoremei Thévenin curentul i este :

$$i = \frac{V_B - V_D}{R_e + g} =$$

$$= \frac{\dfrac{E\left[R(c+d) + c(d+b)\right]}{(a+c)(d+b) + R(a+b+c+d)}}{g + \dfrac{acR(a+b+c+d)+ac(b+d)(a+c)+\left[b(a+c+R)+aR\right]\left[d(a+c+R)+cR\right]}{(a+c+R)\left[R(a+b+c+d)+(b+d)(a+c)\right]}} .$$

Deci:

$$i = \frac{E\left[R(c+d) + c(d+b)\right]}{R\left[g(a+b+c+d)+(a+b)(c+d)\right] + g(b+d)(a+c)+(bcd+acd+abd+abc)}$$

3.19. Aplicînd teorema lui Thévenin să se determine curentul în ampermetrul din circuitul de curent continuu din figura 3.19.a.

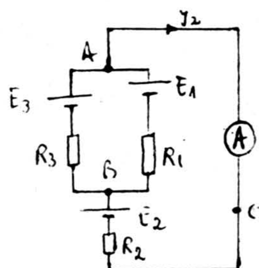


Fig.3.19.a.

Se cunosc: $E_1 = 1$ V, $E_2 = 2$ V, $E_3 = 3$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$.

R.: Rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat, între punctele A şi C este

$$R_e = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} = 4\,\Omega$$

Diferenţa de potenţial între punctele B şi A este conform teoremei Millman:

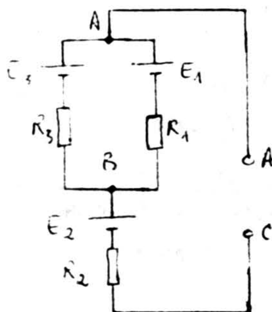


Fig.3.19.b.

$$V_A - V_B = \frac{\dfrac{E_3}{R_3} + \dfrac{E_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_1}} = 2 \text{ V}$$

Diferenţa de potenţial între punctele C şi A este conform fig.3.19.b.

$$V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = V_A - V_B + E_2$$

Curentul ce trece prin ampermetru

$$I_2 = \frac{V_A - V_C}{R_e} = 1 \text{ A}$$

3.20. O punte Wheatstone este uşor dezechilibrată. In ipoteza că la echilibru $x = R = R_1 = R_2$ să se exprime variaţia

curentului di în galvanometru, în funcţie de tensiunea U între punctele A şi B, de rezistenţa g a galvanometrului, de R şi dR.

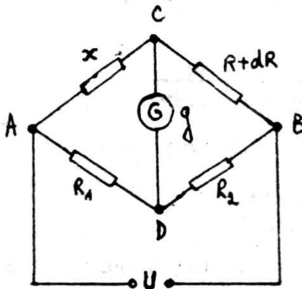


Fig. 3.20.a.

R.: Aplicăm teorema Thévenin.

Rezistenţa echivalentă, R_e, a circuitului între punctele C şi D este (fig.3.20.b).

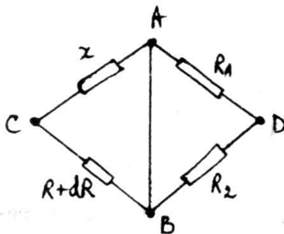


Fig.3.20.b.

$$R_e = \frac{x(R+dR)}{x+R+dR} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

Deoarece dR este foarte mic în raport cu R, putem scrie

$$R_e \simeq \frac{xR}{x+R} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

Inainte de introducerea galvanometrului, schema electrică a punţii este cea din figura 3.20.c.

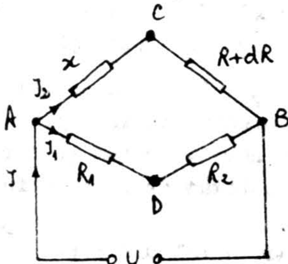


Fig.3.20.c.

Deci curenţii ce trec prin ramurile acestui circuit sînt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U}{x + R + dR}$$

Diferenţa de potenţial V_C-V_D o putem scrie astfel:

$$V_C-V_D = (V_A-V_D)-(V_A-V_C) = I_1 R_1 - I_2 x = \frac{UR_1}{R_1+R_2} - \frac{Ux}{x+R+dR}$$

La echilibrul punţii

$$x R_2 = R_1 R \quad \text{deci} \quad R_2 = \frac{R_1 R}{x}$$

Cu această valoare a lui R_2, diferenţa de potenţial $V_C - V_D$ devine:

$$V_C - V_C \simeq \frac{Ux}{R + x} - \frac{Ux}{x + R + dR} = \frac{Ux \cdot dR}{(R+x)(R+x+dR)}$$

Deoarece dR este foarte mic în raport cu R, putem scrie

$$V_C - V_D \simeq \frac{xU \cdot dR}{(x+R)^2}$$

Conform teoremei Thévenin, variaţia curentului di în galvanometru este:

$$di = \frac{V_C - V_D}{g + R_e} = \frac{\frac{xU \cdot dR}{(x+R)^2}}{g + \frac{xR}{x+R} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Ţinînd cont că la echilibru $x = R = R_1 = R_2$

$$di = \frac{\frac{U \cdot dR}{4R}}{g + \frac{R}{2} + \frac{R}{2}} = \frac{U}{4R(g+R)} dR$$

3.21. La bornele unui motor cu t.c.e.m. $E' = 115$ V şi rezistenţa $R' = 1\,\Omega$ se leagă în paralel două surse de t.e.m. $E_1 = 130$ V, respectiv $E_2 = 140$ V şi rezistenţa interioară $r_1 = 1\,\Omega$ şi respectiv $r_2 = 2\,\Omega$. Să se determine curenţii ce trec prin fiecare sursă, precum şi curentul debitat de surse prin motor (fig. 3.21).

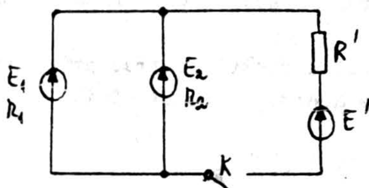


Fig. 3.21.

R.: Aplicăm teorema Norton pentru a calcula rapid curentul prin motor. Curentul de scurtcircuit este:

$$I_{sc} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = 200 \text{ A}$$

Rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat este:

$$R_e = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{2}{3}\ \Omega$$

Curentul ce trece prin motor este

$$I = \frac{R_e I_{sc} - E'}{R_e + R'} = \frac{200 \cdot \frac{2}{3} - 115}{\frac{2}{3} + 1} = 11\ A$$

Tensiunea la bornele motorului este

$$U = E' + IR' = 126\ V$$

Aplicînd legea lui Ohm generalizată obtinem:

$$I_1 r_1 + U = E_1 \qquad \text{deci} \qquad I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1} = 4\ A$$

$$I_2 r_2 + U = E_2 \qquad \text{deci} \qquad I_2 = \frac{E_2 - U}{r_2} = 7\ A$$

3.22. In schema din figura 3.22 sînt reprezentate trei generatoare cu rezistenţe interne neglijabile şi cu tensiuni electromotoare $E_1 = 25$ V, $E_2 = 55$ V, $E_3 = 125$ V şi trei rezistori cu rezistenţele $a = 40\ \Omega$, $b = 80\ \Omega$, $c = 72\ \Omega$. Să se calculeze curenţii din ramurile circuitului.

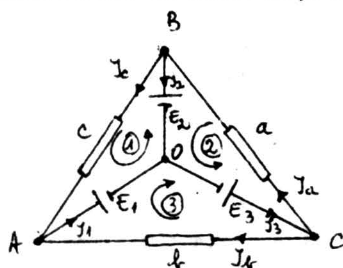


Fig. 3.22.

R.: Pentru determinarea curenţilor I_a, I_b şi I_c se aplică legea a doua a lui Kirchhoff în cele trei ochiuri:

ochiul 1: $I_c \cdot c = E_2 - E_1$ deci $I_c = \frac{E_2 - E_1}{c} = \frac{5}{12}\ A = 0,417\ A$

ochiul 2: $I_a \cdot a = E_3 - E_2$ deci $I_a = \frac{E_3 - E_2}{a} = \frac{7}{4}\ A = 1,75\ A$

ochiul 3: $I_b \cdot b = E_3 - E_1$ deci $I_b = \frac{E_3 - E_1}{b} = \frac{5}{4}\ A = 1,25\ A$

Curenţii I_1, I_2 şi I_3 se determină cu ajutorul primei legi a lui Kirchhoff scrisă pentru nodurile A, B şi C.

nodul A: $I_1 = I_c + I_b = 1,667$ A

nodul B: $I_2 = I_a - I_c = 1,333$ A

nodul C: $I_3 = I_a + I_b = 3$ A

Dacă $E_1 = E_2 = E_3$ rezultă $I_c = I_a = I_b = 0$ şi deci $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ (prin dispozitiv nu trece nici un curent).

3.23. Să se găsească expresia curentului I ce trece prin rezistorul R din circuitul reprezentat în figura 3.23.a. Rezistența internă a surselor se consideră neglijabilă.

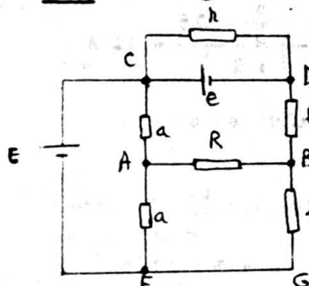


Fig. 3.23.a.

R.: Un rezultat rapid se obţine aplicînd teorema Thévenin.

Rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat, înainte de introducerea rezistenţei R, între punctele A şi B este conform figurii 3.23.b.

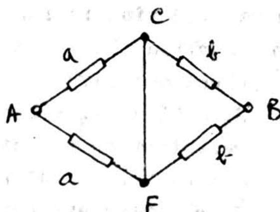


Fig. 3.23.b.

$$R_e = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Pentru determinarea diferenţei de potenţial $V_A - V_B$ se foloseşte schema electrică (figura 3.23.c.).

$$V_A - V_B = V_A - V_F - (V_B - V_F) = I_1 a - I_2 b$$

Curenţii se determină cu ajutorul teoremei superpoziţiei. Circuitul ce conţine doar sursa E este reprezentat în figura 3.23.d.

Conform teoremei lui Kirchhoff curenţii sînt:

$$I' = \frac{E\cdot(a+b)}{2\,a\,b}$$

$$I_1' = I' \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{E}{2a}$$

$$I_2' = I' \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{E}{2b}$$

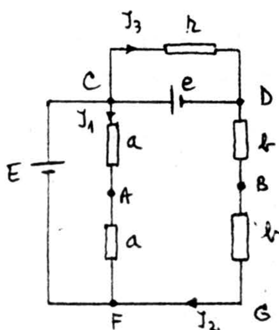


Fig.3.23.c.

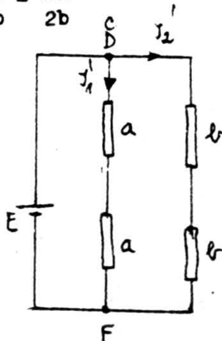


Fig.3.23.d.

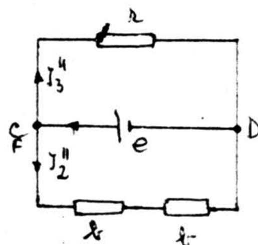


Fig.3.23.e.

Circuitul ce conţine doar sursa e este reprezentat în figura 3.23.e.

Curenţii ce trec prin acest circuit sînt:

$$I_1'' = \frac{2b}{r+2b} \cdot \frac{e(r+2b)}{2\ br} = \frac{e}{r}$$

$$I_2'' = \frac{e}{2\ b}$$

Deci curenţii ce trec prin rezistorii a şi b, în circuitul din figura 3.23.c sînt

$$I_1 = I_1' = \frac{E}{2\ a} \qquad I_2 = I_2' - I_2'' = \frac{E-e}{2\ b}$$

Putem determina expresia diferenţei de potenţial $V_A - V_B$:

$$V_A - V_B = I_1 a - I_2 b = \frac{E}{2} - \frac{E-e}{2} = \frac{e}{2}$$

Curentul ce trece prin rezistenţa R, conform teoremei Thévenin:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_e + R} = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{a+b}{2} + R} = \frac{e}{a+b+2R}$$

<u>3.24</u>. Determinaţi curenţii I_1, I_2, I_3, I_4 din reţeaua

din figura 3.24. Se cunosc $E_1 = 2$ V, $E_2 = 0,5$ V, $E_3 = 2,2$ V,

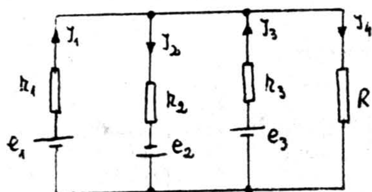


Fig. 3.24.

$r_1 = 3\Omega$, $r_2 = 2\Omega$, $r_3 = 4\Omega$, $R = 5\Omega$.

R.: Problema se rezolvă rapid dacă folosim teorema Millman.

Diferenţa de potenţial U, între capetele fiecărei ramuri este

$$U = \frac{\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{R}} = \frac{58}{77} \text{ A}$$

Curenţii prin fiecare ramură se determină cu ajutorul legii lui Ohm generalizate.

Astfel: $I_4 = \frac{U}{R} = \frac{58}{385} = 0,151$ A

$U + I_3 r_3 = e_3$ deci $I_3 = \frac{e_3 - U}{r_3} = \frac{557}{1540} = 0,362$ A

$U + I_1 r_1 = e_1$ deci $I_1 = \frac{e_1 - U}{r_1} = \frac{32}{77} = 0,415$ A

$U + e_2 = I_2 r_2$ deci $I_2 = \frac{U + e_2}{r_2} = \frac{193}{308} = 0,626$ A

3.25. In circuitul din figura 3.25.a se dau $R_1 = R_4 = 4\Omega$, $R_2 = R_3 = R = 3\Omega$, $R_5 = 5\Omega$ şi $E = 4$ V. Să se determine curentul prin rezistorul R_4.

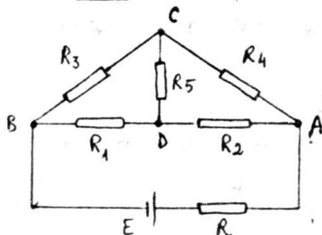


Fig. 3.25.a.

R.: Problema se rezolvă uşor dacă se aplică teorema Thévenin. Rezistenţa echivalentă, înainte de introducerea lui R_4 se determină cu schema următoare (fig. 3.25.b).

Se transfigurează triunghiul ABD într-o stea, obţinîndu-se schema echivalentă (figura 3.25.c). Unde conform teoremei Kennely avem:

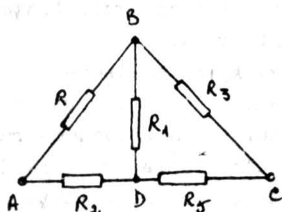


Fig. 3.25.b.

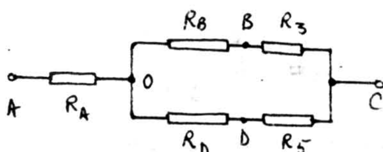


Fig. 3.25.c.

$$R_A = \frac{R \cdot R_2}{R+R_1+R_2} = \frac{9}{10}\ \Omega \qquad R_B = \frac{R \cdot R_1}{R+R_1+R_2} = \frac{6}{5}\ \Omega$$

$$R_D = \frac{R_1\ R_2}{R+R_1+R_2} = \frac{6}{5}\ \Omega$$

Deci

$$R_e = R_A + \frac{(R_B+R_3)(R_D+R_5)}{R_B+R_3+R_D+R_5} = \frac{177}{52}\ \Omega$$

Diferența de potențial între punctele C și A se determină cu ajutorul circuitului din figura 3.25.d.

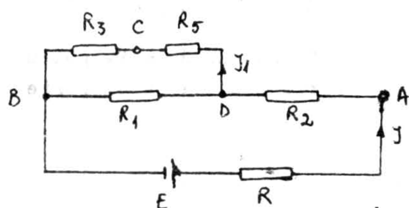


Fig. 3.25.d.

Curenții I și I_1 din circuit sînt:

$$I = \frac{E}{R+R_2+\dfrac{R_1(R_3+R_5)}{R_1+R_3+R_5}} = \frac{6}{13}\ A$$

$$I_1 = I\ \frac{R_1}{R_1+R_3+R_5} = \frac{2}{13}\ A$$

Diferența de potențial V_A-V_C se determină astfel:

$$V_A-V_C = V_A-V_D+V_D-V_C = IR_2 + I_1R_5 = \frac{28}{13}\ V$$

Conform teoremei Thévenin, curentul ce trece prin rezistorul R_4 este:

$$I_4 = \frac{V_A-V_C}{R_e-R_4} = \frac{16}{55}\ A$$

3.26. O tensiune electromotoare necunoscută e se poate determina cu ajutorul montajului din figura 3.26.a (metodă de

opoziție). Sursa de tensiune electromotoare E are rezistență neglijabilă.

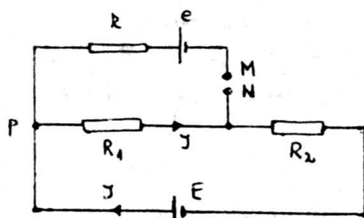


Fig. 3.26.a.

a) Aplicînd teorema Thévenin să se determine curentul i din galvanometrul conectat între punctele M și N. Se cunosc rezistența internă r a pilei cu t.e.m. e și rezistența galvanometrului.

b) Să se stabilească în ce condiții curentul din galvanometru circulă de la M la N.

c) Păstrînd constantă suma R_1+R_2, determinați în ce condiții sensibilitatea absolută di/de a dispozitivului de măsurare este maximă.

R.: Rezistența echivalentă a circuitului, înainte de introducerea galvanometrului, între punctele M și N (fig. 3.26.b) este:

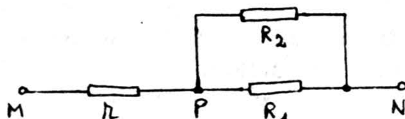


Fig. 3.26.b.

$$R_{MN} = r + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \qquad (1)$$

Notînd $R_1+R_2 = R$, putem scrie următoarea expresie pentru rezistența R_{MN}:

$$R_{MN} = \frac{r R + R_1 R_2}{R} \qquad (2)$$

Curentul ce trece prin circuit înainte de introducerea galvanometrului este:

$$I = \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{E}{R} \qquad (3)$$

Diferența de potențial dintre punctele M și N se poate determina astfel:

$$V_M-V_N = V_M-V_P+V_P-V_N = -e + IR_1 = E\frac{R_1}{R} - e = \frac{ER_1-eR}{R} \qquad (4)$$

Conform teoremei Thévenin, curentul ce trece prin galvanometru este:

$$i = \frac{V_M-V_N}{R_{MN}+g} = \frac{ER_1 - eR}{R(r+g)+R_1 R_2} \qquad (5)$$

Curentul i prin galvanometru este nul cînd $ER_1 = eR$. Deci t.e.m. necunoscută se determină din relația

$$e = E\frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad (6)$$

b) Curentul i circulă de la M la N dacă potențialul punctului M este mai mare decît potențialul punctului N, deci

$$V_M - V_N > 0 \qquad (7)$$

Ținînd cont de relația (4) rezultă condiția $ER_1 > eR$.

c) Sensibilitatea absolută, S, a dispozitivului de măsurare se determină prin derivarea relației (5) în raport cu e:

$$S = \left|\frac{di}{de}\right| = \frac{R}{R(r+g) + R_1(R-R_1)} \qquad (8)$$

Sensibilitatea atinge valoarea maximă, cînd prima derivată a lui S în raport cu R_1 se anulează:

$$\frac{dS}{dR_1} = -\frac{(R - 2R_1)R}{\left[R(r+g) + R_1(R-R_1)\right]^2} = 0 \qquad (9)$$

Deci $\quad R = 2R_1 \quad$ sau $\quad R_1 = \dfrac{R}{2}$

3.27. O termorezistență a cărei rezistență variază cu temperatura după legea $A = A_o(300-t)/(100+t)$, în care $A_o = 500\,\Omega$ iar t este temperatura cuprinsă în intervalul $50^\circ C - 250^\circ C$. Valoarea acestei termorezistențe se determină cu ajutorul unei punți Wheatstone (fig.3.27). La o anumită temperatură echilibrul punții este obținut pentru $a = 100\,\Omega$, $b = 1000\,\Omega$, $R_o = 5000\,\Omega$.

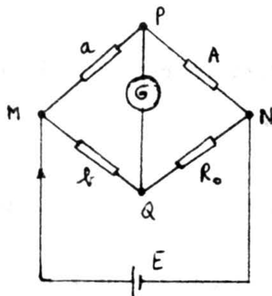


Fig.3.27.

a) Să se calculeze A și t.

b) Să se calculeze eroarea relativă a măsurării lui A și eroarea absolută pentru t dacă valorile lui a, b, R_o sînt estimate cu o eroare de 0,2 %.

R.: a) Condiția care este îndeplinită la echilibrul punții se determină ușor cu ajutorul teoremei Thévenin.

Rezistența echivalentă între P și Q înainte de introducerea galvanometrului este:

$$R_{PQ} = \frac{aA}{a+A} + \frac{bR_o}{b+R_o}$$

Diferența de potențial între punctele P și Q înainte de introducerea galvanometrului este

$$V_P-V_Q = V_M-V_Q-(V_M-V_P) = \frac{E}{b+R_o}\,b - \frac{E}{a+A}\,a = \frac{E(bA-AR_o)}{(a+A)(b+R_o)}$$

Curentul ce trece prin galvanometru este:

$$i = \frac{V_P-V_Q}{R_{PQ}+g}$$

unde g este rezistența galvanometrului.

Puntea este la echilibru cînd $i = 0$ ($V_P = V_Q$).

Condiția pe care trebuie s-o îndeplinească rezistențele la echilibrul punții este: $bA = aR_o$.

Deci:

$$A = \frac{aR_o}{b} = 500\,\Omega$$

Introducînd această valoare în expresia rezistenței obținem

$$t = 100^oC$$

b) Eroarea absolută de determinare a rezistenței A, δ_A, este:

$$\delta_A = \frac{R_o}{b}\,\delta_a + \frac{a}{b}\,\delta_{R_o} + \frac{aR_o}{b^2}\,\delta_b$$

unde δ_a, δ_{R_o}, δ_b sînt erorile absolute pentru a, R_o respectiv b.

Eroarea relativă ce afectează măsurarea lui A este:

$$\varepsilon_A = \frac{\delta_A}{A} = \frac{R_o}{b}\cdot\frac{b}{aR_o}\,\delta_a + \varepsilon_{R_o} + \varepsilon_b = \varepsilon_a + \varepsilon_{R_o} + \varepsilon_b = 3\cdot 0,2\% = 0,6\%$$

Temperatura se determină cu ajutorul relației

$$t = \frac{3\,A_o - A}{A+A_o}\cdot 100$$

Eroarea absolută cu care se determină t este:

$$\delta_t = \left|\frac{\partial t}{\partial A}\right| \cdot \delta_A = \frac{4A_o}{(A+A_o)^2} \cdot 100 \cdot \delta_A$$

Pentru $A = A_o$

$$\delta_t = 100 \cdot \frac{\delta_A}{A} = 100 \cdot \varepsilon_A = 0{,}6^oC$$

3.28. Cu o termorezistenţă a cărei rezistenţă variază cu temperatura după legea $A = A_o(300-t)/(100+t)$ cu $A_o = 500\,\Omega$ şi un rezistor R a cărui rezistenţă este constantă se realizează montajul din figura 3.28.

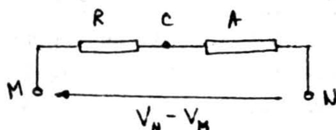


Fig.3.28.

Tensiunea aplicată între punctele M şi N este $V_N-V_M = 8$ V.

a) Să se exprime diferenţa de potenţial V_N-V_C în funcţie de A şi R şi apoi de R şi t.

b) Calcultai valoarea R_1 a lui R pentru care diferenţa V_N-V_C este o funcţie liniară de temperatură. Scrieţi, de asemenea, şi această funcţie.

R.: a) Valoarea curentului ce trece prin această porţiune de circuit se determină cu legea lui Ohm:

$$I = \frac{V_N-V_M}{R+A} \qquad (1)$$

Diferenţa de potenţial V_N-V_C în funcţie de A şi R este dată de relaţia

$$V_N-V_C = IA = \frac{A}{R+A} \cdot (V_N-V_M) \qquad (2)$$

In funcţie de R şi t, V_N-V_M se poate scrie

$$V_N-V_C = \frac{A_o(300-t)}{100(R+3A_o)+(R-A_o)t}\,(V_N-V_M) \qquad (3)$$

b) Inlocuind valorile numerice în (3) obţinem

$$V_N-V_C = \frac{4000(300-t)}{100(R+1500)+(R-500)t} \qquad (4)$$

Din (4) se observă că pentru $R = R_1 = 500\,\Omega$ diferenţa

de potențial $V_N - V_C$ este liniară. Expresia ei este :

$$V_N - V_C = 6 - \frac{t}{50}$$

3.29. Cu o termorezistență a cărei rezistență variază cu temperatura după legea $A = A_0(300-t)/(100+t)$, cu $A_0 = 500\,\Omega$, un rezistor $R = 500\,\Omega$, a cărui rezistență este constantă și o sursă cu t.e.m. $E = 8$ V se realizează montajul din figura 3.29. Valorile celorlalți rezistori sînt $a = 5000\,\Omega$ și $b = 3000\,\Omega$. Să se exprime diferența de potențial $V_F - V_C$ în funcție de temperatura t. Să se calculeze această diferență de potențial pentru $t = 50^{\circ}$C și $t = 250^{\circ}$C.

Fig. 3.29.

R.: Diferența de potențial $V_F - V_C$ se poate scrie și astfel:

$$V_F - V_C = V_B - V_C - (V_B - V_F) = \frac{E}{R+A} \cdot A - \frac{E}{a+b}\,a = \frac{E(bA - Ra)}{(a+b)(R+A)}$$

Inlocuind valorile numerice obținem

$$V_F - V_C = 1 - \frac{t}{50}$$

La $t = 50^{\circ}$C rezultă $V_F = V_C$, iar la $t = 250^{\circ}$C rezultă $V_F - V_C = -4$ V.

3.30. Pentru rețeaua din figură se consideră cunoscute $E_1 = 12$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 2\,\Omega$. Aplicînd metoda ochiurilor independente să se determine curenții prin laturi.

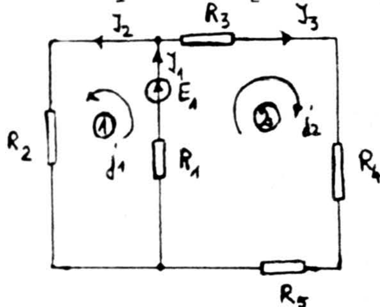


Fig. 3.30.

R.: Se consideră două ochiuri independente parcurse de curenții j_1 și j_2. Scriem legea lui Ohm generalizată pentru cele două ochiuri:

ochiul 1 :

$$R_{11} j_1 + R_{12} j_2 = E_1$$

ochiul 2: $R_{21}j_1 + R_{22}j_2 = E_1$

Unde

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 5\,\Omega \qquad R_{12} = R_{21} = R_1 = 2\,\Omega$$

$$R_{22} = R_1 + R_3 + R_4 + R_5 = 9\,\Omega$$

In urma înlocuirilor numerice obţinem sistemul

$$5j_1 + 2j_2 = 12$$

$$2j_1 + 9j_2 = 12$$

Cu soluţiile $j_1 = \frac{84}{41}$ A $\qquad j_2 = \frac{36}{41}$ A

Deci curenţii ce trec prin laturile circuitului sînt:

$$I_1 = j_1 + j_2 = \frac{120}{41}\text{ A} \qquad I_2 = j_1 = \frac{84}{41}\text{ A} \qquad I_3 = j_2 = \frac{36}{41}\text{ A}$$

3.31. Intr-o reţea electrică (figura 3.31.a) formată din 4 rezistori $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$, sînt conectate 2 surse de curent continuu cu t.e.m. $E_1 = 8$ V, $E_2 = 4$ V şi rezistenţe interne neglijabile. Utilizînd teorema superpoziţiei, să se calculeze intensităţile curenţilor prin laturi.

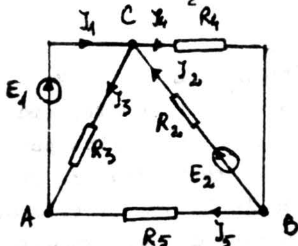


Fig.3.31.a.

R.: Considerăm circuitul ce conţine doar sursa E_1 (fig.3.31.b).

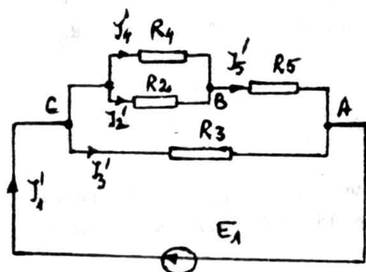


Fig.3.31.b.

Curenţii prin laturile acestui circuit, conform legilor lui Kirchhoff sînt:

$$I_1' = \frac{E_1\left(R_3 + R_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}\right)}{R_3\left(R_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}\right)} = \frac{8\cdot 28}{3\cdot 19}\text{ A}$$

$$I_5' = \frac{E_1}{R_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} = \frac{24}{19}\text{ A} \qquad I_3' = \frac{E_1}{R_3} = \frac{8}{3}\text{ A} \qquad I_4' = I_5'\,\frac{R_2}{R_2 + R_4} = \frac{8}{19}\text{ A}$$

$$I_2' = \frac{16}{19}\text{ A}$$

Considerăm circuitul ce conţine numai sursa E (fig.3.31.c)

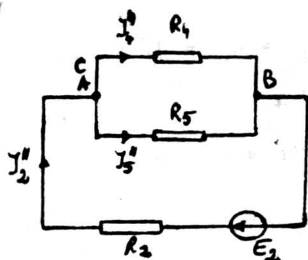


Fig. 3.31.c.

în care $I_2'' = \dfrac{E_2}{R_2 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4+R_5}} = \dfrac{18}{19}$ A

$$I_4'' = I_2'' \frac{R_5}{R_4+R_5} = \frac{10}{19} \text{ A}$$

$$I_5'' = \frac{8}{19} \text{ A}$$

Curenţii prin laturile circuitului dat sînt:

$$I_1 = I_1' - I_5'' = \frac{200}{57} \text{ A} \qquad I_4 = I_4' + I_4'' = \frac{18}{19} \text{ A}$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = \frac{2}{19} \text{ A} \qquad I_5 = I_5' - I_5'' = \frac{16}{19} \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' = \frac{8}{3} \text{ A}$$

3.32. In reţeaua din figură se dau $E_1 = E_3 = 100$ V, $E_2 = 50$ V, $R_1 = R_2 = R_5 = 10\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$. Utilizînd teorema Thévenin să se determine curentul prin rezistorul R_5 şi tensiunea la bornele acestuia.

R.: Rezistenţa echivalentă a circuitului, înainte de in-introducerea rezistorului R_5, punctele B şi A este

$$R_{BA} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = 6\,\Omega$$

Fig. 3.32.

Tensiunea U_{BA} se determină uşor aplicînd teorema Millman:

$$U_{BA} = \frac{\dfrac{E_1+E_3}{R_1+R_3} - \dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1+R_3} + \dfrac{1}{R_2}} = 50 \text{ V}$$

Curentul ce trece prin rezistenţa R_5 conform teoremei Thévenin este :

$$I_5 = \frac{U_{BA}}{R_{BA} + R_5} = \frac{25}{8}\ A$$

Tensiunea la bornele rezistorului R_5 este:

$$U = I_5 R_5 = \frac{250}{8}\ V$$

3.33. Să se determine curentul prin rezistorul R_5 şi tensiunea la bornele acestuia aplicînd teorema Thévenin. Se cunosc $E_2 = 6$ V, $E_3 = 12$ V, $R_2 = R_3 = R_4 = 2\,\Omega$, $R_5 = R_6 = 4\,\Omega$.

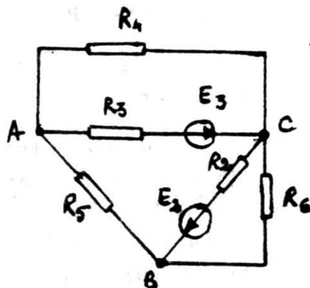


Fig.3.33.a.

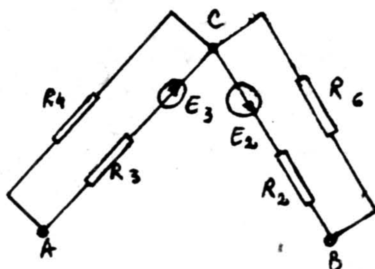


Fig.3.33.b.

R.: Rezistenţa echivalentă a circuitului înainte de conectarea rezistorului R_5, între punctele A şi B este

$$R_e = \frac{R_2\ R_6}{R_2 + R_6} + \frac{R_3\ R_4}{R_3 + R_4} = \frac{7}{3}\,\Omega$$

Pentru calculul tensiunii generatorului Thévenin folosim circuitul din figura 3.33.b.

Diferenţa de potenţial $V_C - V_A$

$$V_C - V_A = R_4 \cdot \frac{E_3}{R_4 + R_3} = 6\ V$$

Diferenţa de potenţial $V_B - V_C$

$$V_B - V_C = R_6 \cdot \frac{E_2}{R_2 + R_6} = 4\ V$$

Deci tensiunea generatorului Thévenin, $V_B - V_A$, este:

$$V_B - V_A = V_B - V_C + V_C - V_A = 10\ V$$

Curentul ce trece prin rezistorul R_5 este

$$I_5 = \frac{U_{BA}}{R_e+R_5} = \frac{30}{19}\ A$$

Tensiunea la bornele rezistorului R_5 este:

$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = \frac{120}{19}\ V$$

3.34. Să se calculeze curenţii din laturile circuitului din figură prin metoda ochiurilor independente (curenţilor de buclă). Se dau: $E_1 = E_4 = 20$ V, $E_3 = 10$ V, $R_1 = R_2 = R_6 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $R_5 = 12\ \Omega$.

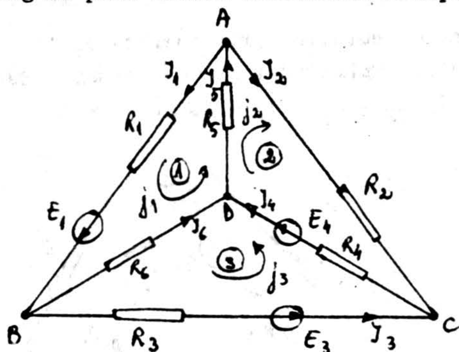


Fig. 3.34.

R.: Se scrie legea lui Ohm generalizată în cele 3 ochiuri independentă, parcurse de curenţii j_1, j_2, j_3.

ochiul 1: $(R_1+R_2+R_6)j_1 + R_5 j_2 - R_6 j_3 = E_1$

ochiul 2: $(R_2+R_5+R_4)j_2 + R_5 j_1 + R_4 j_3 = E_4$

ochiul 3: $-R_6 j_1 + R_4 j_2 + (R_6+R_4+R_3)j_3 = E_3+E_4$

Inlocuind valorile numerice obţinem sistemul:

$$3\ j_1 + 6\ j_2 - j_3 = 10$$
$$6\ j_1 + 10\ j_2 + 3\ j_3 = 10$$
$$-j_1 + 3\ j_2 + 6\ j_3 = 15$$

Cu soluţiile $j_1 = -\frac{5.108}{109}$ A ; $j_2 = \frac{5\cdot 89}{109}$ A ; $j_3 = -\frac{5\cdot 8}{109}$ A

Curenţii prin laturile circuitului sînt

$$I_1 = j_1 = -\frac{5\cdot 108}{109}\ A \qquad I_4 = j_2+j_3 = \frac{5\cdot 81}{109}\ A$$

$$I_2 = j_2 = \frac{5\cdot 89}{109}\ A \qquad I_5 = j_1+j_2 = -\frac{5\cdot 19}{109}\ A$$

$I_3 = j_3 = -\frac{5\cdot 9}{109}$ A $\qquad I_6 = j_1 - j_3 = -\frac{5\cdot 100}{109}$ A

I_1 parcurge latura AB de la B la A

I_2 parcurge latura AC de la A la C

I_3 parcurge latura BC de la C la B

I_4 parcurge latura CD de la C la D

I_5 parcurge latura AD de la A la D

I_6 parcurge latura BD de la D la B

3.35. Elementele componente ale circuitului din figură au următoarele valori: $E_1 = 20$ V, $E_2 = 10$ V, $E_3 = 5$ V, $R_1 = 5\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_2 = R_4 = 3\Omega$.

Să se determine puterea disipată în rezistorul R_2

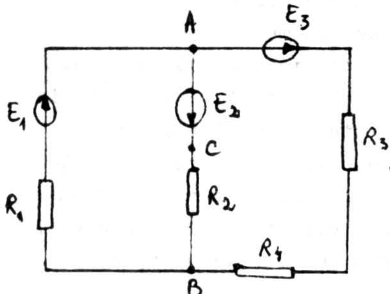


Fig. 3.35.

R.: Valoarea intensității curentului electric ce parcurge rezistorul R_2 se determină ușor cu ajutorul teoremei Thévenin.

Rezistența echivalentă între punctele C și B, în absența rezistorului R_2 este:

$$R_{CB} = \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4} = 2,5\,\Omega$$

Diferența de potențial între punctele A și B se determină rapid folosind teorema Millman:

$$V_A - V_B = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3+R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3+R_4}} = \frac{20}{3}\ \text{V}$$

Diferența de potențial $V_C - V_B$ este:

$$V_C - V_B = E_2 + V_A - V_B = \frac{50}{3}\ \text{V}$$

Curentul ce trece prin rezistorul R_2 este:

$$I_2 = \frac{V_C - V_B}{R_{CB} + R_2} = \frac{100}{33}\ A$$

Deci se poate scrie puterea disipată în R_2:

$$P = I_2^2 R_2 = \frac{10000}{363}\ W$$

3.36. Se consideră circuitul din figură în care $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $R_1 = 3\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $E_1 = 16$ V, $E_2 = 2$ V. Puterea disipată în rezistorul R_1 este $P_1 = 27$ W. Se cer:

a) valoarea rezistenţei R_2;

b) ce valoare trebuie să aibă rezistenţa R_1 pentru ca puterea disipată în ea să fie minimă;

c) presupunînd că R_2 are valoarea de la punctul a, iar restul elementelor rămîn neschimbate, care sînt valorile maximă şi minimă ale puterii disipate în rezistorul R_3.

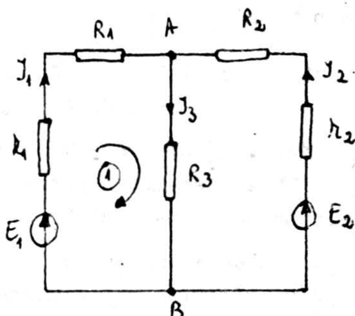


Fig. 3.36.a.

R.: a) Curentul I_1 ce trece prin rezistorul R_1 este:

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = 3\ A \qquad (1)$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff scrisă în ochiul 1 se determină I_3

ochiul 1 $\quad I_1(R_1+r_1) + I_3R_3 = E_1 \quad$ deci $I_3 = \dfrac{E_1 - I_1(R_1+r_1)}{R_3} = 2A \qquad (2)$

Tensiunea între A şi B este $\quad U_{AB} = I_3R_3 = 4$ V $\quad (3)$

Tensiunea între A şi B conform teoremei Millman este:

$$U_{AB} = \frac{\dfrac{E_1}{r_1+R_1} + \dfrac{E_2}{R_2+r_2}}{\dfrac{1}{r_1+R_1} + \dfrac{1}{R_2+r_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{4 + \dfrac{2}{1+R_2}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{1+R_2} + \dfrac{1}{2}} \qquad (4)$$

Egalînd (3) cu (4) rezultă $R_2 = 1\ \Omega$.

b) Curenţii care circulă prin ramurile circuitului se

pot determina ușor prin metoda ochiurilor independente. Din legea lui Ohm generalizată scrisă în cele 2 ochiuri obținem:

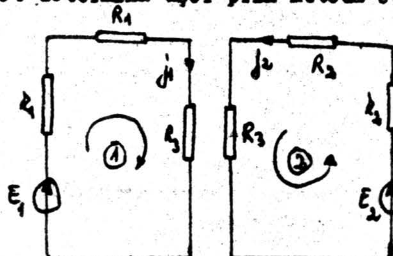


Fig. 3.36. b.

ochiul 1

$j_1(R_1+r_1+R_3)+j_2R_3 = E_1$ (5)

ochiul 2

$j_1R_3+j_2(R_2+r_2+R_3) = E_2$ (6)

Notăm $r_1 = r_2 = r$

Ecuațiile (5) și (6) ale sistemului admit soluțiile:

$$j_1 = \frac{E_1(r+R_2+R_3) - E_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1+rR_1+rR_2+2R_3r+r^2} \qquad (7)$$

$$j_2 = \frac{E_2(r+R_1+R_3) - E_1R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1+rR_1+rR_2+2R_3r+r^2} \qquad (8)$$

Curentul care circulă prin R_1 este $I_1 = j_1$.

Inlocuind valorile numerice $r = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $E_1 = 16$ V, $E_2 = 2$ V se poate scrie pentru I_1 expresia

$$I_1 = \frac{15}{R_1 + 2} \qquad (9)$$

Deci puterea disipată prin R_1 este

$$P = I_1^2R_1 = \frac{225\,R_1}{(R_1+2)^2} \qquad (10)$$

Derivata expresiei (10) este $\frac{dP}{dR_1} = \frac{225(2-R_1)}{(R_1+2)^2}$

Studiind variația lui P în raport cu R_1

R_1	0		2		∞
P	0	↗	$\frac{225}{8}$	↘	0
$\frac{dP}{dR_1}$		+	0	-	

observăm că puterea disipată prin R este minimă dacă $R_1 = 0$.

c) Inlocuind valorile numerice $R_2 = r = 1\Omega$, $R_3 = 2\Omega$,

$E_1 = 16$ V, $E_2 = 2$ V se poate scrie pentru I_3 expresia:

$$I_3 = \frac{R_1+17}{2(R_1+2)} \qquad (11)$$

Deci puterea disipată prin R_3 este:

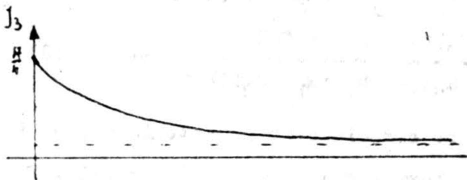
$$P_3 = R_3 I_3^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1+17}{R_1+2}\right)^2 \qquad (12)$$

Puterea disipată prin R_3 este maximă respectiv minimă după cum curentul I_3 este maxim respectiv minim.

Derivata expresiei (11) este

$$\frac{dI_3}{dR_1} = \frac{1}{2}\,\frac{R_1+2-R_1-17}{(R_1+2)^2} = -\frac{15}{2(R_1+2)^2}$$

Reprezentînd grafic pe I_3 în raport cu R_1

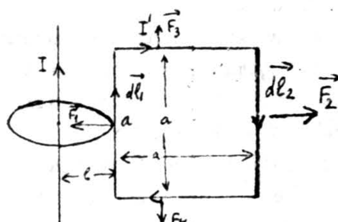


se observă că I_3 are valoarea cea mai mare pentru $R_1 = 0$ și cea mai mică pentru $R_1 = \infty$.

Deci prin R_3 se disipă cantitatea cea mai mare de energie ($P_{3\,max} = 36{,}12$ W) cînd $R_1 = 0$ și respectiv cea mai mică ($P_{3\,min} = 0{,}5$ W) cînd $R_1 = \infty$.

4. ELECTROMAGNETISM

4.1. Să se calculeze forța de interacțiune dintre un fir prin care trece un curent electric de intensitate I, rectiliniu și infinit și un cadru pătratic străbătut de curentul I', situat în același plan cu firul și avînd două laturi paralele cu acesta.



R.: Vom scrie, mai întîi, modulul vectorului inducție $\vec{B}$ la distanțele a și b de conductorul străbătut de curentul I:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{și} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$$

Vectorii $\vec{B_1}$ și $\vec{B_2}$ au sensul dat de regula burghiului: vectorii $\vec{B_1}$ și $\vec{B_2}$ sînt perpendiculari pe foaia de hîrtie și intră în aceasta fiind tangenți la liniile de cîmp magnetice create de curentul I și avînd forma unor cercuri concentrice.

Asupra laturilor pătratului de lungime a, paralele cu curentul I și străbătute de curentul I' acționează forțele Laplace $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$ care sînt perpendiculare pe planul format de suporții vectorilor $\vec{B_1}$ și $d\vec{l_1}$, respectiv $\vec{B_2}$ și $d\vec{l_2}$. Acestea se scriu sub formă diferențială astfel $d\vec{F_1} = I'd\vec{l}_1 \times \vec{B_1}$, $d\vec{F_2} = I'd\vec{l}_2 \times \vec{B_2}$. Modulele lor sînt $dF_1 = I' \cdot dl_1 \cdot B_1 \cdot \sin \pi/2 = I' \cdot dl_1 \cdot B_1$ și $dF_2 = I' \cdot dl_2 \cdot B_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = I' \cdot dl_2 \cdot B_2$. Deoarece în acest caz B_1 și B_2 sînt constante, prin integrare rezultă

$$\int dF_1 = F_1 = I' \int_0^a dl_1 \cdot B_1 = I' \cdot B_1 \cdot a = \frac{\mu_0 I \cdot I' a}{2\pi b}$$

Analog $F_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I \cdot I' a}{2\pi(b+a)}$. Forțele $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$ sînt coliniare și opuse la vîrf, iar modulul forței rezultante este $F = F_1 - F_2$

$$F = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot I \cdot I'}{2\pi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \quad \frac{a^2 \cdot I \cdot I'}{b \cdot (a+b)}$$

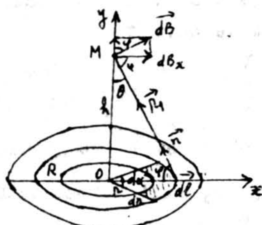
Forțele $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ care acționează asupra laturilor perpendi-

culare pe conductor sînt egale în modul şi opuse la vîrf; rezultanta lor este zero.

4.2. Un disc de ebonită cu raza R este uniform încărcat pe una din feţe cu cantitatea de electricitate Q. Discul se roteşte în jurul unui ax perpendicular care trece prin centrul său cu o frecvenţă ν rot./sec. Să se determine:

a) inducţia magnetică într-un punct M aflat pe axa de rotaţie la distanţa h de centrul discului;

b) inducţia magnetică în centrul discului.



R.: Vom considera pe disc o coroană de rază r şi lăţime dr pe care se află sarcina electrică dQ. Aria coroanei este $\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 \cong 2\pi r\cdot dr$. (Deoarece dr este mic s-a neglijat $(dr)^2$). Prin regula de trei simplă se calculează sarcina dQ:

$$\left.\begin{array}{l}\pi R^2 \ldots\ldots Q \\ 2\pi . r . dr \ldots\ldots dQ\end{array}\right\} \Rightarrow \quad dQ = \frac{2\,Q\cdot r\cdot dr}{R^2}$$

Sarcina dQ efectuînd o rotaţie completă într-o perioadă T (timpul necesar unei rotaţii), vom avea un curent electric echivalent de intensitate $I = dQ/T = 2\,Q\cdot r\cdot dr/T$. Conform legii Biot-Savart expresia vectorului $\vec{dB}$ este

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{n}}{r_1^2} \quad \text{în care} \quad |\vec{dl}\times\vec{n}| = dl\cdot\sin\frac{\pi}{2} = dl$$

şi deci, $\quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\cdot dl/r_1^2 \quad$ cu $\quad r_1 = \sqrt{r^2+h^2}$ şi

$$dl = r\,d\alpha$$

Proiectînd $\vec{dB}$ pe axele Ox şi Oy (se va ţine cont că

$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$, $\sin\theta = \cos\varphi =$

$= \frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}}$) se obţin expresiile:

$$dB_x = dB\cdot\sin\varphi = \frac{\mu_0\cdot Q\cdot\nu}{2\pi R^2}\cdot\frac{h. r^2. dr. d\alpha}{(r^2+h^2)^{3/2}} \quad \text{şi}$$

$$dB_y = dB\cdot\cos\varphi = \frac{\mu_0\cdot Q\cdot \nu}{2\pi R^2}\cdot\frac{r^3\cdot dr\cdot d\alpha}{(r^2+h^2)^{3/2}}\ .$$

Deoarece $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$ rezultă prin integrare:

$$B_y = \frac{\mu_0\cdot Q\cdot \nu}{R^2}\int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$. Făcînd substituţia $r^2+h^2 =$

$= t^2 \Longrightarrow r.dr = t.dt$ şi deci $I = \int \frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} =$

$$= \int (t^2-h^2).t.dt.t^{-3} = t + h^2/t = \sqrt{r^2+h^2} + h^2/\sqrt{r^2+h^2} =$$

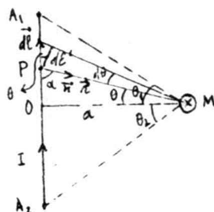
$$= (r^2+2\,h^2)/\sqrt{r^2+h^2}$$

Pentru integrala definită $I = (R^2+2h^2)/\sqrt{R^2+h^2} - 2\,h$ şi deci

$$B_y = \frac{\mu_0\cdot Q\cdot \nu}{R^2}\left(\frac{R^2+2h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2\,h\right)$$

Integrala care va conduce la expresia lui B_x nu este necesar să fie efectuată, deoarece din motive de simetrie aceasta trebuie să fie egală cu zero (elementul de suprafaţă <u>simetric</u> cu cel din figură contribuie în punctul M cu un vector egal în modul şi de sens opus cu dB_x din figură, fapt care va conduce la o contribuţie egală cu zero).

<u>4.3</u>. Să se găsească expresia modulului vectorului inducţie magnetică $\vec{B}$ într-un punct M situat la distanţa "a" de un conductor de <u>lungime finită</u> parcurs de un curent constant de intensitate I cunoscută. Să se particularizeze în cazul unui conductor rectiliniu infinit lung.



<u>R</u>.: In punctul M, vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ este perpendicular pe planul definit de conductor şi de punctul M, avînd sensul dat de regula burghiului. In cazul figurii, $\vec{B}$ este perpendicular pe foaie şi îndreptat spre aceasta.

Un element de curent $I.\vec{dl}$ din jurul unui punct P oare-

Cda 265/1991 Fasc. 11

care al conductorului, a cărui poziţie se va defini în raport cu punctul O (proiecţia lui M pe conductor) prin unghiul θ (v. figura), va crea în M un vector inducţie elementară

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\vec{d\ell} \times \vec{n}}{r^2}$$

al cărui modul este $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I.d\ell}{r^2} \sin\alpha$ $(|\vec{d\ell} \times \vec{n}| =$

$= d\ell \sin(\pi - \alpha) = d\ell.\sin\alpha$, $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta)$.

Deoarece $d\ell' = d\ell.\cos\theta = r.d\theta$ şi $a = r\cos\theta \Rightarrow$

$$d\ell = \frac{a.d\theta}{\cos^2\theta} \quad \text{şi} \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{a} \text{. Integrînd} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta . d\theta = \frac{\mu_0 . I}{4\pi a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

unde θ_1 şi θ_2 sînt valorile algebrice ale unghiului θ corespunzătoare extremităţilor A_1 şi A_2 ale conductorului.

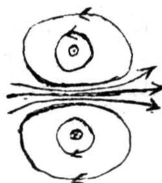
Caz particular: dacă A_1 şi A_2 tind la $+\infty$ respectiv $-\infty$, atunci θ_1 şi θ_2 capătă respectiv valorile $-\pi/2$ şi $+\pi/2$.

In acest caz rezultă expresia $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

4.4. Fie un conductor de formă circulară (spiră) de rază R parcurs de un curent de intensitate constantă I. Să se deseneze spectrul liniilor de cîmp magnetic ale spirei. Să se calculeze modulul vectorului inducţie magnetică $\vec{B}$ într-un punct M aflat la distanţa z pe o dreaptă perpendiculară pe planul spirei şi care trece prin centrul acesteia.

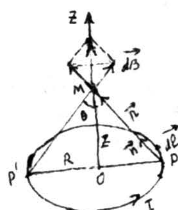
R.: Intr-un plan diametral perpendicular pe planul spirei, liniile de cîmp din vecinătatea conductorului circular sînt de formă aproape circulară, sensul acestora fiind dată de regula burghiului. Liniile de cîmp sînt simetrice faţă de linia de cîmp dispusă de-a lungul axei de simetrie. (v.figura). Din motive de simetrie, două elemente de curent dispuse la extremităţile aceluiaşi diametru (PP') produc, într-un punct M aflat pe axa spirei (v.figura), inducţii magnetice elementare simetrice a căror rezultantă are direcţia acestei axe. Deci inducţia mag-

netică $\vec{B}$ produsă de un curent circular, are direcţia axei acestuia. Poziţia lui M se defineşte fie prin ordonata OM = z, fie prin unghiul θ. Vectorul inducţie magnetică $\vec{dB}$, produsă de elementul de curent $I.\vec{dl}$, are expresia



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \frac{\vec{dl} \times \vec{n}}{r^2} \text{ şi}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \frac{dl}{r^2} .\sin \frac{\pi}{2}$$



Unghiul $(\vec{n}, \vec{dl}) = \pi/2$. Expresia modulului lui $\vec{B}$ se găseşte integrînd expresia proiecţiei lui $\vec{dB}$ pe axa Oz, de-a lungul spirei. Din figură rezultă $dB_z = dB.\sin\theta$ şi deci

$$B_z = \int dB_z = \int \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \frac{dl}{r^2} .\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \frac{\sin\theta}{R^2} \int dl$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \sin\theta .l = \frac{\mu_0}{4\pi} .I. \frac{1}{r^2} \sin\theta . 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} .$$

$$. \frac{R}{r^2} . \sin\theta$$

Deoarece $R = r\sin\theta$ şi $r^2 = R^2+z^2$, expresia lui B_z devine

$$B_z = \frac{\mu_0 .I}{2} . \frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 .I}{2} . \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 .I}{2R} \sin^3\theta$$

<u>Caz particular</u>: Dacă punctul M se găseşte în centrul spirei ($z = 0$ sau $\theta = \pi/2$) rezultă

$$B_0 = \frac{\mu_0 .I}{2R}$$

<u>4.5</u>. Prin 2 conductori rectilinii şi paraleli, situaţi la distanţa $r = 0{,}1$ m unul de altul, circulă doi curenţi I_1 şi I_2 de sens contrar. Rezultanta cîmpurilor magnetice create de cei doi curenţi în exterior, la distanţa $r_1 = 0{,}5$ m de curentul cel mai slab, este zero, iar rezultanta cîmpurilor magnetice create de cei doi curenţi în exterior, la distanţa $r_2=r_1=0{,}5$ m de cel mai puternic dintre curenţi, este egal cu $11/3\pi$ amperi

pe metru. Se cere: a) Valoarea celor doi curenţi; b) Rezultanta cîmpurilor la jumătatea distanţei dintre cei doi conductori.

R.: a) Intensitatea cîmpului magnetic H creat de un curent care trece printr-un conductor rectiliniu foarte lung, la distanţa d de conductor este $H = I/2\pi d$ [A/m]. Utilizînd această formulă şi datele problemei rezultă ecuaţiile (în exteriorul conductorilor vectorii $\vec{H_1}$ şi $\vec{H_2}$ au sensuri opuse):

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_2}{r+r_1} - \frac{I_1}{r_1}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_2}{r_2} - \frac{I_1}{r+r_2}\right) = \frac{11}{3\pi}$$

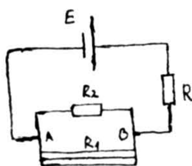
Inlocuind datele numerice rezultă $I_1 = 10$ A şi $I_2 = 12$ A.

b) In acest punct vectorii cîmp magnetic $\vec{H_1}$ şi $\vec{H_2}$ sînt paraleli şi de acelaşi sens şi deci modulul rezultantei

$$H = H_1 + H_2 = \frac{1}{\pi r}(I_1 + I_2) = 70\ \frac{A}{m}$$

4.6. Un circuit cuprinde în serie o baterie electrică E de rezistenţă interioară $r_i = 1\Omega$, o rezistenţă exterioară $R = 1,4\Omega$ şi un cadru circular cu 10 spire, avînd raza $r = 0,28$ m şi rezistenţa totală $R_1 = 8\Omega$. Planul cadrului este în planul meridianului magnetic. In paralel cu cadrul se pune o rezistenţă $R_2 = 2\Omega$.

In centrul cadrului se află un ac magnetic, care, după stabilirea curentului, se roteşte cu un unghi de 45° (v.fig.).



Ştiind că proiecţia orizontalei a cîmpului magnetic terestru este $H' = 50/\pi$ A/m, să se calculeze: a) Intensităţile curenţilor în cadru, în rezistenţa R_2 şi în circuitul principal; b) Tensiunea e.m. a bateriei.

R.: a) Cîmpul creat în cadru are expresia $H = NI_1/2r = 10\,I_1/0,56$. Acul magnetic va lua direcţia rezultantei celor două cîmpuri $\vec{H}$ şi $\vec{H'}$. Putem scrie $\mathrm{tg}\,\alpha = H/H' = \mathrm{tg}\,45^\circ = 1 \Rightarrow H = H'$. Rezultă $I_1 = 0,893$ A. Tensiunea dintre punctele A şi B este $U_{AB} = I_1R_1 = I_2R_2$

$I_2 = R_1/R_2 \cdot I_1 = 8/2 \cdot 0,893 = 3,572$ A. Curentul total
$I = I_1 + I_2 = 4,465$ A

b) Rezistenţa echivalentă $R_{AB} = R_1R_2/(R_1+R_2) = 1,6\,\Omega$

Tensiunea e.m. a bateriei este $E = I(R_{AB}+R+r) =$ $= 16,86$ volţi.

4.7. Un circuit-serie este format dintr-o rezistenţă de 20Ω, un solenoid cu $N = 1000$ spire, cu lungimea $\ell = 12,56$ cm şi un vas cu soluţie de $CuSO_4$ avînd electrozii de Cu. Solenoidul are un miez de Fe cu $\mu_r = 100$ şi secţiunea transversală S de $50\ cm^2$. Rezistenţa se află într-un calorimetru care conţine $M = 216$ g apă la $20°C$. Curentul transportă $n_1 = 9.10^{20}$ ioni de Cu la catod şi produce în solenoid un flux magnetic de $\Phi = 8$ Wb. Se cere:

a) Masa de Cu depusă la catod. b) Intensitatea curentului din circuit. c) Timpul cît circulă curentul. d) Inducţia magnetică a solenoidului şi inductanţa acesteia. e) La ce temperatură se încălzeşte apa.

Se dau: masa atomică a Cu egală cu 63 g/mol, numărul lui Faraday, $F = 96500$ C/mol, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ N/A^2$, $c_a = 4187$ J/kg.grad.

R.: a) Valenţa Cu fiind n = 2, cantitatea de electricitate depusă la catod este

$$q = n_1.n.e = 9.10^{20}.2.1,6.10^{-19} = 288\ C$$

Masa de substanţă depusă:

$$m = 1/F\cdot A/n\cdot q = 1/96.500 \times 63/2 \times 288 = 9,4\cdot 10^{-2}\ kg$$

b)

$$\Phi = N.B.S = \mu.H.N.S = \mu.N^2.I.S/\ell = \mu_r\cdot\mu_0.N^2.S\cdot I/\ell$$

Deci

$$I = \Phi\cdot\ /\mu_r\cdot\mu_0\cdot N^2.\ S = 1,6\ A$$

c) $t = q/I = 180$ secunde

d) $B = \mu_r\cdot\mu_0\cdot N\cdot I/\ell = 1,6$ Tesla

Deci, inductanţa bobinei

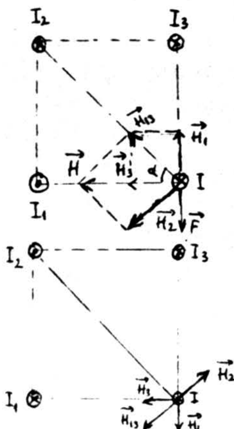
$$L = \Phi/I = 5\ Henry$$

e) Temperatura apei se deduce din egalitatea:

$$R\cdot I^2.t = m.c_a\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta t = R\cdot I^2.t/m\cdot c_a = 10,1\ °C$$

4.8. Prin trei vîrfuri ale unui pătrat cu latura de 10 cm trec trei curenţi perpendiculari pe planul figurii. Curentul $I_1 = 251,2$ A circulă de la figură spre noi. Ceilalţi doi cu-

renţi au sensul opus lui I_1 şi valorile I_2 = 502,4 A şi I_2 = 251,2 A. Se cer: a) Intensitatea cîmpului magnetic produs în al patrulea vîrf, opus lui I_2. b) Unghiul făcut de această intensitate cu diagonala pătratului. c) Forţa e.m. care se exercită asupra unităţii de lungime a unui curent I = 200A rectiliniu, paralel cu ceilalţi, de acelaşi sens cu I_1 şi care trece prin al patrulea vîrf al pătratului (v.figura). d) Ce devine această forţă dacă I_1 şi I_2 îşi schimbă sensul? Experimentul se face în vid.



R.: a) $H_1 = I_1/2\pi r = 251,2/2\pi \cdot 0,1 = 400$ A/m

$H_3 = I_3/2\pi r = 251,2/2\pi \cdot 0,1 = 400$ A/m

Rezultanta lui $\vec{H_1}$ şi $\vec{H_3}$ are modulul:

$$H_{13} = \sqrt{H_1^2 + H_3^2} = 400\sqrt{2} \text{ A/m}$$

$$H_2 = I_2/2\pi r\sqrt{2} = 400\sqrt{2} \text{ A/m}$$

b) $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$; $H = \sqrt{H_{13}^2 + H^2} = 800$ A/m

c) $F = B \cdot I \cdot \ell = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot I \cdot \ell$,

$$\frac{F}{\ell} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot I = 64\pi \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

d) In acest caz, H = 0, F = 0. Intensităţile cîmpurilor magnetice îşi păstrează valorile, iar sensul lor este în fig.b.

4.9. In circuitul unei baterii cu t.e.m. de 4 V, se găseşte o rezistenţă de 1,4 Ω şi un solenoid cu rezistenţa de 8Ω. Solenoidul are 100 spire, secţiunea de 25 cm^2 şi o lungime de 6,28 cm. In paralel cu solenoidul se găseşte montat un vas cu $CuSO_4$, avînd electrozi din Cu şi rezistenţa de 2Ω. După închiderea circuitului, pe catodul din vas se depun 320 mg Cu în 20 min. şi 50 sec. Se cere:

a) Intensitatea curentului în ramurile circuitului.

b) Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul bobinei, fluxul care străbate bobina şi inducţia proprie a colenoidului. c) Rezistenţa interioară a bateriei. (Echivalentul electrochimic al Cu este $0,32 \cdot 10^{-6}$ kg/C).

R.: a) Legea Faraday conduce la: $I_1 = m/k \cdot t$ =

$= 320\cdot10^{-6}/0,32\cdot10^{-6}\cdot1250 = 0,8$ A. Tensiunea la bornele solenoidului (comune cu cele ale vasului în care se face electroliza) este:

$U_1 = R_1I_1 = R_2I_2 = 2\cdot0,8 = 1,6$ V $\Rightarrow I_2 = U_1/R_2 = 0,2$ A

I_2 = curentul care trece prin solenoid. Curentul total din circuit $I = I_1 + I_2 = 0,8 + 0,2 = 1$ A.

b) $H = N\cdot I_2/\ell = 100\cdot0,2/0,0627 = 10^3/\pi$ A/m

$\Phi = B S = \mu_0 H.S = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^3/\pi\cdot25\cdot10^{-4} = 10^{-6}$ Wb.

$L = \Phi/I_2 = 10^{-6}/0,2 = 1/2\cdot10^5$ H

c) $I = E/(R_e + r)$, $r = E/I - R_e = 4/1 - 3 = 1\Omega$.

<u>4.10</u>. Pe un tor de Fe cu secţiunea $S = 12,56$ cm^2 şi cu diametrul D = 50 cm, este înfăşurată, spiră lîngă spiră, o bobină din fir de Cu cu diametrul firului, d = 1,57 mm. Dacă la capetele firului se aplică o tensiune U = 2,2 V, bobina este străbătută de un flux $\Phi = 16\pi\cdot10^{-2}$ Wb. Rezistivitatea Cu, $\rho = 1,7\cdot10^{-2}\ \Omega$.m. Se cere:

a) Curentul care trece prin bobină.

b) Inductanţa proprie a bobinei.

c) Permeabilitatea relativă a Fe.

d) Cîmpul creat în interiorul bobinei.

<u>R</u>.: a) Numărul de spire este dat de relaţia

$N.d = \pi D \Rightarrow N = 3,14\cdot50/0,157 = 1000$

Diametrul unei spire este dat de relaţia :

$S = \pi d_s^2/4 \Rightarrow d_s = \sqrt{4\ S/\pi} = 4$ cm

Lungimea firului $\ell = N\cdot\pi\cdot d_s = 40\pi$ m.

Rezistenţa firului $R = \rho.\ell/s = \rho\cdot40\pi\cdot4/\pi d^2 = 1,1\ \Omega$.

$I = U/R = 2,2/1,1 = 2$ A

b) $L = \Phi/I = 16\pi\cdot10^{-2}/2 = 8\pi\cdot10^{-2}$ H

c) Inductanţa bobinei se poate scrie astfel:

$L = \mu.N^2.S/\ell = \mu_0\cdot\mu_r\cdot N^2.S/2\pi r = 4\pi\cdot10^{-7}.\ \mu_r N^2 S/2\pi r$,

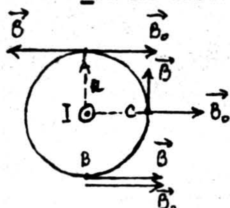
în care r = raza torului.

Rezultă: $\mu_r = 2\pi r L/4\pi\cdot10^{-7}.N^2S = r L/2\cdot10^{-7}.N^2.S =$
$= 0,25\cdot16\pi\cdot10^{-2}/2\cdot10^{-7}\cdot10^6\cdot4\pi\cdot10^{-4} = 500$

d) $H = NI/l = NI/2\pi r = 1000\cdot 2/6,28\cdot 0,25 = 1280$ A/m

<u>4.10</u>. Un fir lung străbătut de un curent de 10 A este plasat într-un cîmp magnetic uniform de $5\cdot 10^{-4}$ T, normal pe liniile de cîmp. In ce puncte cîmpul magnetic rezultant este egal cu zero?

<u>R</u>.: In desen este reprezentat, în secţiune transversală, un conductor parcurs de un curent electric cu intensitatea I, aşezat perpendicular pe direcţia liniilor unui cîmp magnetic uniform. Liniile cîmpului magnetic al curentului din conductor sînt cercuri concentrice cu centrul pe conductor. Din infinitatea de puncte situate în planul acestei secţiuni numai în punctul A este posibil ca inducţia cîmpului magnetic rezultant să fie nulă, deoarece numai în acest punct cei doi vectori inducţie magnetică $\vec{B}$ şi $\vec{B}_0$ sînt de sens opus. Din compunerea celor doi vectori cu originea în A, pentru ca rezultatul să fie nul, trebuie ca modulele celor doi vectori să fie egale: $|\vec{B}| = |\vec{B}_0|$ sau $\mu I/2\pi r = B_0$, $r = \mu I/2\pi B = 4\cdot 10^{-7}$ m.

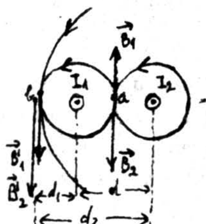


In cazul general, locul geometric al punctelor în care inducţia cîmpului magnetic rezultant este nulă, este o dreaptă paralelă cu conductorul, situată la distanţa $r = 4\cdot 10^{-7}$ m faţă de acesta, trecînd prin punctul A.

<u>4.11</u>. Două conductoare foarte lungi, paralele, aflate la distanţa d = 10 cm unul faţă de altul, sînt parcurse de curenţi de acelaşi sens, de intensităţi $I_1 = 5$ A şi $I_2 = 10$ A. Să se afle inducţia magnetică a cîmpului rezultant în următoarele puncte: a) la jumătatea distanţei dintre cele două conductoare; b) într-un punct exterior situat la $d_1 = 5$ cm de curentul mai slab şi la $d_2 = 15$ cm de celălalt. In ce puncte inducţia magnetică rezultantă este nulă?

<u>R</u>.: Desenul reprezintă o secţiune transversală a celor doi conductori, în care există curenţii I_1 şi I_2. Sînt desenate liniile celor două cîmpuri magnetice pentru punctele reprezentative a şi b, precum şi inducţiile magnetice corespunzătoare acestor puncte.

a) $\vec{B}_a = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$; $B_a = B_2 - B_1$; $B_a = \mu_0/\pi d \cdot (I_2 - I_1) =$
$= 2 \cdot 10^{-5}$ T



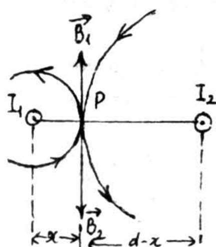
b) $\vec{B}_b = \vec{B}'_2 + \vec{B}'_1$; $B_b = B'_2 + B'_1$;

$B_b = \mu_0/2\pi \cdot (\frac{I_2}{d_2} + \frac{I_1}{d_1})$;

$d_2 = 3\ d_1$;

$B_b = \mu_0/6\pi d_1 \cdot (3\ I_1 + I_2) = 3,3 \cdot 10^{-5}$T

c) Din infinitatea punctelor conținute în secțiunea plană transversală a celor două conductoare, într-un singur punct cei doi vectori inducție magnetică au același modul și orientările opuse, pentru ca în acest fel inducția cîmpului magnetic rezultant, în acel punct să fie nulă. Desenul de mai jos arată că acest punct se află între cele două conductoare, poziția sa rezultînd din condiția:



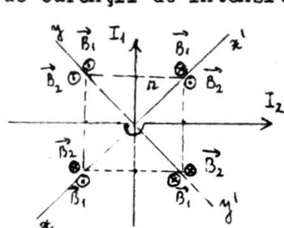
$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$; $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$;

$B_1 = B_2$; $\mu_0 I_1/2\pi x = \mu_0 I_2/2\pi(d-x)$;

$x = I_1 d/(I_1 + I_2) = 3,3$ cm .

Locul geometric al tuturor punctelor în care inducția cîmpului magnetic rezultant este nulă, este o dreaptă care trece prin punctul P, fiind paralelă cu cele 2 conductoare.

<u>4.12</u>. Două conductoare rectilinii, coplanare, parcurse de curenții de intensitate I, fac între ele un unghi de 90°. Să se găsească vectorul inducție $\vec{B}$ în punctele aflate pe bisectoarele unghiurilor formate de cele două conductoare.

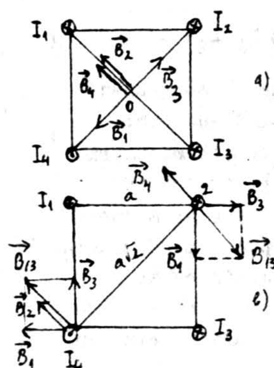


<u>R</u>.: Cele 2 conductoare (v.desenul) sînt parcurse de curenții $I_1 = I_2 = I$. Sînt figurate inducțiile magnetice ale celor 2 cîmpuri magnetice în punctele de pe bisectoarele xx' și yy'. Pentru punctele de pe bisectoarele xx' se poate scrie $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$; $B_1 = B_2$. Deci $\vec{B}_{xx'} =$

$= \vec{B}_1+\vec{B}_2$; $B_{xx'} = B_1-B_2 = 0$. Pentru punctele bisectoarei yy', $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$; $B_1 = B_2$ şi deci $\vec{B}_{yy'} = \vec{B}_1+\vec{B}_2$; $B_{yy'} = B_1+B_2$;

$B_{yy'} = \mu_0 I/\pi r$.

4.13. Prin vîrfurile unui pătrat cu latura a = 10 cm trec patru conductoare rectilinii, foarte lungi, perpendiculare pe planul desenului din figură, parcurse de curent în sensul indicat pe figură. Intensităţile curenţilor au valorile: $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 1$ A, $I_4 = 2$ A. Să se determine: a) inducţia magnetică B_o în centrul pătratului; b) inducţia magnetică B_2 şi B_4 în vîrfurile 2 şi 4 ale pătratului.



R.: a) Sensul curenţilor şi a vectorilor inducţie magnetică sînt date în figura a)

$\vec{B}_o = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4$; $\vec{B}_o = \vec{B}_{13}+\vec{B}_{24}$;

$\vec{B}_{13} = \vec{B}_1+\vec{B}_3$; $\vec{B}_{13} = \vec{B}_1+\vec{B}_3$; $B_{13} = B_1-B_3$;

$\vec{B}_{24} = \vec{B}_2 + \vec{B}_4$; $B_{24} = B_2 + B_4$;

$B_o = \sqrt{B_{13}^2 + B_{24}^2}$; $B_o = \sqrt{(B_1-B_3)^2+(B_2+B_4)^2}$;

$I_1 = I_3$; $B_1 = B_3$; $I_2 = I_4$; $B_2 = B_4$;

$B_o = 2\,B_2$; $B_2 = \mu I_2/2\pi r = \sqrt{2}\,a/2$;

$B_o = \sqrt{2}\;\mu I_2/\pi a$

b) Inducţia magnetică în vîrful 2 rezultă din compunerea cîmpurilor magnetice ale curenţilor I_1, I_2 şi I_3. Prezenţa curentului I_2 nu influenţează acest rezultat. Din desenul b) rezultă

$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$; $\vec{B}_{13} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3$; $\vec{B}_2 = \vec{B}_{13} + \vec{B}_4$;

$B_{13}^2 = B_1^2 + B_3^2$; $B_1 = B_3$; $B_{13} = \sqrt{2}\,B_1$; $B_{13} = \sqrt{2}\;\mu I_1/2\pi a$;

$B_4 = \mu I_4/2\pi r$; $r = a\sqrt{2}$; $I_4 = 2\,I_1$; $B_4 = \sqrt{2}\;\mu I_1/2\pi a$;

$B_4 = B_{13}$; $\vec{B}_4 = -\vec{B}_{13}$; $\vec{B}_2 = 0$

Inducţia magnetică în vîrful 4 rezultă astfel (v.fig.):

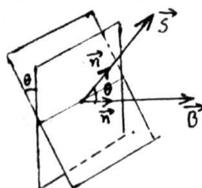
$\vec{B}_4 = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_2$; $\vec{B}_{13} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3$; $B_1 = B_3$; $\vec{B}_4 = \vec{B}_{13} + \vec{B}_2$;

$B_4 = B_{13} + B_2$; $B_{13} = \sqrt{2}\, B_1$; $B_{13} = \sqrt{2}\ \mu I_1/2\pi a$;

$B_2 = \mu I_2/2\pi a\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\mu I_1/2\pi a$; $B_2 = B_{13}$; $B_4 = 2\, B_2$;

$B_4 = \sqrt{2}\ \mu I_1/\pi a$

4.14. Un cadru pătrat cu latura L = 20 cm, se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω = 100 rad/s, într-un cîmp magnetic uniform, cu inducţia de 1 T. Axul de rotaţie este perpendicular pe liniile de cîmp şi trece prin centrul cadrului. Se cer: a) fluxul magnetic prin suprafaţa cadrului, cînd acesta este perpendicular pe liniile de cîmp; b) fluxul magnetic prin suprafaţa cadrului, după cum s-a rotit cu 90°, 180°, 270°; c) reprezentarea grafică a fluxului magnetic prin suprafaţa cadrului în funcţie de timp.

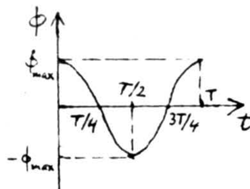


R: a) Vectorul $\vec{S}$ este un vector al cărui modul S este egal cu aria suprafeţei cadrului şi a cărui orientare este dată de orientarea normalei pe suprafaţa cadrului $\vec{n}$: $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$.

La momentul iniţial orientarea lui $\vec{n}$ era aceeaşi cu orientarea lui $\vec{B}$. Unghiul cu care s-a rotit cadrul este unghiul cu care s-a rotit şi versorul n: $\theta = \omega t$. Din definiţia fluxului magnetic rezultă $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{n}\cdot S$; $\phi = B\cdot S\cdot\cos(\vec{B}, \vec{n}) = B\cdot S\cdot\cos\theta$; $\phi = \phi_{max}\cos\omega t$;

$\phi_{max} = B.S.$

Desenul din figură reprezintă graficul variaţiei fluxului magnetic, prin suprafaţa cadrului, în timpul unei rotaţii complete.



Cazuri particulare:

a) $\theta = 0$; $\phi = \phi_{max} = B\cdot S$

b) $\theta = 90°$; $\phi = 0$

c) $\theta = 180°$; $\phi = -\phi_{max} = -B\cdot S$

d) $\theta = 270°$; $\phi = 0$

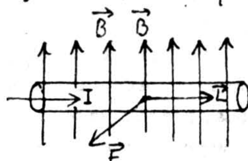
4.15. Să se afle fluxul magnetic printr-o secţiune

transversală în miezul unei bobine, știind că are secțiunea transversală de 10 cm^2 și este confecționată din oțel, cu permeabilitatea magnetică relativă 700. Bobina are 600 spire, lungimea de 15 cm și este parcursă de 2 A.

R.: Pentru o singură spiră a solenoidului, fluxul magnetic este $\phi_1 = B\,S$. Pentru cele N spire ale acestuia, fluxul magnetic este $\phi = N\phi_1 = N\,B\,S$. Deoarece inducția magnetică în interiorul solenoidului este $B = \mu NI/\ell$ rezultă $\phi = \mu N^2SI/\ell = \mu_0\mu_r N^2SI/\ell$; ℓ = lungimea solenoidului.

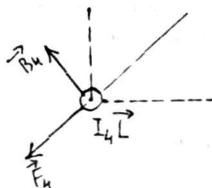
4.16. Intr-un cîmp magnetic uniform, de inducție 1 T, se găsește un conductor lung de 0,2 m, așezat perpendicular pe liniile cîmpului magnetic și parcurs de un curent cu intensitatea de 10 A. Ce forță e.m. se exercită asupra lui? Care este orientarea acestei forțe?

R.: Forța e.m. are expresia: $\vec{F} = I\cdot\vec{L}\times\vec{B}$. Modulul forței este: $F = I\cdot|\vec{L}\times\vec{B}| = I\cdot L\cdot B\cdot\sin\frac{\pi}{2} = I\cdot L\cdot B = 10\cdot 0{,}2\cdot 1 = 2N$.



Orientarea forței $\vec{F}$ este dată de regula burghiului drept: se rotește vectorul $\vec{L}$ a cărui orientare este dată de sensul curentului (v.figura), către vectorul $\vec{B}$ pe drumul cel mai scurt. In acest caz burghiul iese din foaia și sensul forței $\vec{F}$ este cel din figură. Modulul lui $\vec{L}$ este egal cu lungimea porțiunii de conductor aflată în cîmp.

4.17. Să se găsească forța e.m. ce acționează asupra unității de lungime a conductorului 4 din problema 4.13 (v. fig.b).



R.: Forța care acționează asupra conductorului 4 este dată de expresia (v.desenul):

$\vec{F}_4 = I_4(\vec{L}\times\vec{B}_4)$ în care $\vec{B}_4 = \vec{B}_{13} + \vec{B}_2$

Deci,

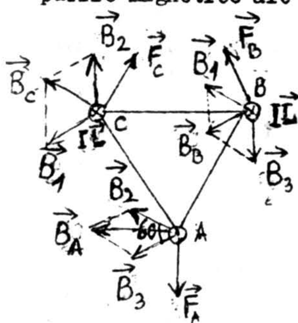
$F_4 = I_4 L\,B_4$; $B_4 = \dfrac{\sqrt{2}\ \mu I_1}{\pi a}$; $I_4 = 2\,I_1$;

$$\frac{F_4}{L} = I_4\cdot B_4 = 2\sqrt{2}\ \mu I_1^2/\pi a$$

4.18. In vîrfurile A, B, C ale unui triunghi echilateral,

cu latura a, se află 3 conductoare paralele. Prin B şi C curenţii sînt de acelaşi sens şi au intensităţi egale I. Prin A curentul are intensitatea I' şi este de sens contrar celorlalţi. Să se afle forţa pe unitatea de lungime, care se exercită asupra fiecărui conductor.

R.: Fiecare conductor parcurs de curent se află în cîmpurile magnetice ale curenţilor din celelalte 2 conductoare (v.figura).



$\vec{F}_A = I'\,\vec{L} \times \vec{B}_A$; $\vec{B}_A = \vec{B}_2 + \vec{B}_3$

$B_A = \sqrt{B_2^2 + B_3^2 + 2\,B_2 \cdot B_3 \cdot \cos 60^\circ}$

$B_2 = B_3 = \mu I/2\pi a$; $B_A = \sqrt{3}\,B_2$;

$B_A = \mu\,\sqrt{3}\,I/2\pi a$

$F_A = I'L\,B_A = \mu\,.\sqrt{3}.I \cdot I'/2\pi a$;

$F_A/L = \mu\,\sqrt{3}\,I\,I'/2\pi a$;

$\vec{F}_B = I\,\vec{L} \times \vec{B}_B$; $\vec{B}_B = \vec{B}_1 + \vec{B}_3$; $B_B = \sqrt{B_1^2 + B_3^2 + 2\,B_1 \cdot B_3 \cdot \cos 120^\circ}$;

$B_1 = \mu I'/2\pi a$; $B_3 = \mu I/2\pi a$; $B_B = \frac{\mu}{2\pi a}\sqrt{I'^2 + I^2 - I'I}$;

$F_B = I\,L\,B_B = \mu\,\frac{IL}{2\pi a}\sqrt{I'^2 + I^2 - I \cdot I}$;

$F_B/L = \mu\,\frac{I}{2\pi a}\sqrt{I'^2 + I^2 - I'I}$; $I' = 2I$; $F_B/L = \mu\,\sqrt{3}\,II'/4\pi a$;

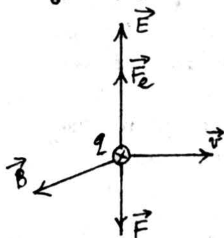
$\vec{F}_C = I\,\vec{L} \times \vec{B}_C$; $\vec{B}_C = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$; $B_C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2\,B_1 B_2 \cos 120^\circ}$;

$B_1 = \mu\,I'/2\pi a$; $B_2 = \mu I/2\pi a$; $B_C = \frac{\mu}{2\pi a}\sqrt{I^2 + I'^2 - I \cdot I'}$;

$F_C/L = \mu\,\sqrt{3}\,I\,I'/4\pi a$.

4.19. Un cîmp electric omogen de intensitate $\vec{E}$ şi un cîmp magnetic omogen de inducţie $\vec{B}$ sînt orientate perpendicular unul pe celălalt. Ce orientare şi ce mărime trebuie să aibă viteza $\vec{v}$ a unui ion pozitiv pentru ca el să poată avea o traiectorie rectilinie cînd este acţionat simultan de cele două cîmpuri?

R.: In urma interacţiunii ionului pozitiv cu cîmpul electric asupra acestuia va acţiona forţa electrică: $\vec{F}_e = q\,\vec{E}$, $|\vec{F}_e| = q\,|\vec{E}|$.

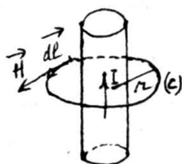


In urma interacţiunii ionului cu cîmpul magnetic asupra acestuia va acţiona forţa Lorentz: $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, $F = q \cdot v \cdot B$. Pentru ca mişcarea ionului să fie rectilinie şi uniformă este necesar ca rezultanta celor 2 forţe care acţionează asupra lui, trebuie să fie egală cu zero: $\vec{F}_e + \vec{F} = 0 \Rightarrow F_e = F$, $\vec{F}_e = -\vec{F}$ (v.fig.).

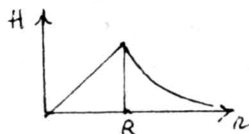
Cele 2 forţe sînt egale în modul şi orientate în sens contrar. Rezultă:

$$q\,E = q\,v\,B \implies v = E/B$$

4.20. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic la distanţa r faţă de axul unui conductor cilindric, foarte lung, cu raza R, străbătut de un curent cu intensitatea I, repartizat uniform în toată secţiunea conductorului. Se consideră cazurile: a) $r > R$; b) $r < R$; c) $r = R$. Să se reprezinte graficul funcţiei: $H = f(r)$.



R.: In desen este prezentat un conductor cilindric parcurs de curentul I şi un contur circular (C_1) care se identifică cu o linie de cîmp, înconjurînd curentul I şi avînd raza r. De-a lungul conturului (C_1), vectorul $\vec{H}$ este tangent la curbă şi constant în modul, iar vectorii $\vec{H}$ şi $\vec{dl}$ sînt coliniari. Din legea Ampère rezultă:



$$\oint_{(C_1)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = I, \qquad \oint_{(C_1)} H \cdot dl = I\ ;$$

$$H \oint_{(C_1)} dl = I\ ;\ H\,2\pi r = I \Rightarrow H = I/2\pi r \Rightarrow$$ Intensitatea

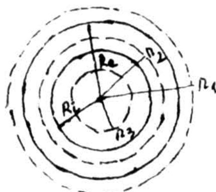
cîmpului magnetic, în puncte din exteriorul conductorului ($r > R$), nu depinde de raza conductorului, fiind aceeaşi cu cea obţinută în cazul unui conductor liniar subţire (v.figura). Dacă conturul circular este curba (C_2) de rază $r < R$, dusă în interiorul conductorului şi dacă I' este intensitatea curentului din interiorul

conturului (C_2), de-a lungul acestuia $|\vec{H}|$ fiind constant, legea Ampère conduce la concluzia:

$$\oint_{(C_2)} \vec{H}\cdot\vec{dl} = I' \; ; \quad H\cdot 2\pi r = I'$$

Deoarece curentul este repartizat uniform în secţiunea conductorului, putem scrie $I' = I\cdot r^2/R^2$ şi deci $H = I/2\pi R^2 r$ (pentru $r < R$). Dacă $r = R$ putem scrie $H = I/2\pi R$ (v.figura).

4.21. Fie o ţeavă cilindrică metalică cu raza exterioară R_e şi raza interioară R_i. Conductorul este parcurs de un curent I, repartizat uniform în secţiunea conductoare. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic H într-un punct situat la distanţa: a) $r > R_e$; b) $R_i \leqslant r \leqslant R_e$; c) $r < R_e$.



R.: In desen se observă contururile circulare în cazurile a), b), c). Legea Ampère conduce la concluziile:

a) $$\oint_{C_1} \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{C_1} = I \; ; \quad H\cdot 2\pi r_1 = I$$

$$(r_1 > R_e)$$

Deci, $H = I/2\pi r$ cu $r > R_e$

b) $$\oint_{C_2} \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{C_2} = \frac{r_2^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} I \; ; \quad H = \frac{(r^2 - R_i^2) I}{2\pi r(R_e^2 - R_i^2)} \; ;$$

$$R_i < r < R_e$$

c) $$\oint_{C_3} \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{C_3} = 0 \; .$$ Deci, $H = 0$ pentru $r < R_i$

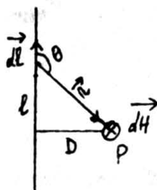
In cavitatea cilindrică din interiorul conductorului, intensitatea cîmpului magnetic este nulă.

4.22. Să se calculeze cu ajutorul formulei Biot-Savart, intensitatea cîmpului magnetic la distanţa D faţă de un conductor liniar, foarte lung, parcurs de un curent cu intensitatea I.

R.: Intensitatea cîmpului magnetic în punctul P (v.fig) creat de elementul de curent $I\cdot\vec{dl}$ are expresia $\vec{dH} = \frac{I}{4\pi}\cdot$

$$\cdot\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \; ; \quad dH = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{dl\cdot r\cdot\sin\theta}{r^3} \; ;$$

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta \cdot d\ell}{r^2} \qquad (1)$$



Metoda I: $tg(\theta - 90^\circ) = \ell/D$;

$tg(\theta - 90) = -ctg\,\theta$; $\ell = -D\,ctg\,\theta$;

$d\ell = -D\,d(ctg\,\theta)$; $d\ell = -Dd(\cos\theta/\sin\theta)$;

$$d\ell = -D\,\frac{-\sin\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta - \cos^2\theta\cdot d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$d\ell = D\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta} \quad (2)\ ; \quad \cos(90-\theta) = D/r;\ r = D/\sin\theta \quad (3)$$

Din (2), (3) şi (1) $\Longrightarrow$ $dH = \frac{I}{4\pi D}\sin\theta\cdot d\theta$;

Integrala se face între limitele $\theta = 0$, ceea ce corespunde elementelor $d\ell$ situate cel mai sus, pînă la $\theta = \pi$, ceeace corespunde elementelor $d\ell$ situate cel mai jos:

$$H = \int dH = \frac{I}{4\pi D}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot d\theta\ ; \quad H = \frac{I}{2\pi D}\ ; \quad B = \frac{\mu I}{2\pi D}$$

Metoda II: Utilizînd (3), relaţia (1) se scrie

$$dH = \frac{I\,D}{4\pi}\cdot\frac{d\ell}{r^3} \quad (4).\ \text{Deoarece}\ r = \sqrt{D^2+\ell^2} \Longrightarrow$$

$$dH = \frac{I\cdot D}{4\pi}\cdot\frac{d\ell}{(D^2+\ ^2)^{3/2}}\ ;\ H = \frac{I\cdot D}{4\pi}\oint_{\Gamma}\frac{d}{(D^2+\ ^2)^{3/2}}$$

Deşi conturul Γ de-a lungul căruia se face integrarea trebuie să fie închis, vom fixa limitele de integrare pentru ℓ variind de la $-\infty$ la $+\infty$ considerînd în acest fel închiderea conturului de integrare la infinit (deoarece curentul trebuie să circule pe un drum închis).

$$H = \frac{I\,D}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\ell}{(D^2+\ell^2)^{3/2}}\ ; \quad H = \frac{I\,D}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\ell}{(D^2+\ell^2)\sqrt{D^2+\ell^2}}$$

$$H = \frac{I\,D}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\ell}{D^2(1+\ell^2/D^2)\cdot D\cdot\sqrt{1+\ell^2/D^2}}\ ;$$

$$H = \frac{I}{4\pi D}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(\ell/D)}{(1+\ell^2/D^2)\sqrt{1+\ell^2/D^2}}\ ;$$

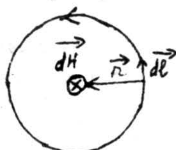
$$l/D = x\ ; \quad H = \frac{I}{4\pi D}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{I}{4\pi D}\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\ ;$$

$$H = \frac{I}{4\pi D}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{I}{4\pi D}\ \frac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{I}{4\pi D}\cdot 2 = \frac{I}{2\pi D}$$

Deci: $H = \dfrac{I}{2\pi D}$ şi $B = \dfrac{\mu I}{2\pi D}$

4.23. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în centrul unei spire cu raza r, parcursă de un curent de intensitate I.



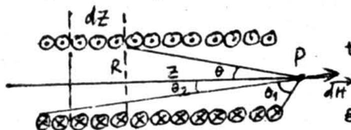
R.: Scriem legea Biot-Savart pentru elementul de curent $I\cdot\vec{dl}$ (v.fig.)

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi}\ \frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}\ ; \quad dH = \frac{I}{4\pi}\ \frac{dl\cdot r}{r^3}\ ;$$

$$H = \frac{I}{4\pi r^3}\oint_C dl = \frac{I}{4\pi r^2}\cdot 2\pi r\ ;$$

$$H = I/2R\ ; \quad B = \mu I/2r$$

4.24. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic într-un punct de pe axul unui solenoid, cu lungimea L avînd N spire şi fiind parcurs de un curent cu intensitatea I.



R.: Numărul de spire pe unitatea de lungime este egal $n = N/L$. Pe distanţa elementară de lungime „dz" se află un număr de spire $N' = n.dz = N/L\cdot dz$. Fiecare din cele N' spire este parcursă de curentul I. Cele N' spire sînt echivalente cu o singură spiră parcursă de curentul: $I' = N'\cdot I = (N.I/L)dz$. Intensitatea cîmpului magnetic produs de această spiră echivalentă în punctul P de pe axa sa, la distanţa z este dat de expresia (v.problema 4.4):

$$dH = I'R^2/2\ (R^2+z^2)^{3/2}\ ; \quad dH = \frac{R^2NI}{2L}\ (R^2+z^2)^{-3/2}\cdot dz\ ;$$

$$\text{ctg}\ \theta = z/R;\ z = R\ \text{ctg}\ \theta; \quad dz = -R\ d\theta/\sin^2\theta\ ;\ R^2+z^2 = R^2/\sin^2\theta;$$

$$(R^2+z^2)^{3/2} = R^3/\sin^3\theta \; ; \quad dH = -\frac{NI}{2L}\sin\theta\cdot d\theta \; .$$

Intensitatea cîmpului magnetic produs în punctul P de întregul solenoid rezultă prin integrare (v.desenul):

$$H = \int dH = -\frac{NI}{2L}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cdot d\theta$$

Pentru stabilirea limitelor de integrare am considerat că primul mănunchi elementar de spire îl formează spirele din capătul din dreapta al solenoidului ($\theta = \theta_1$), iar ultimul îl formează spirele de la capătul din stînga al solenoidului ($\theta = \theta_2$).

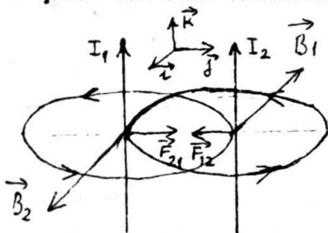
După integrare: $H = \frac{N\cdot I}{2L}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$;

$$B = \mu\frac{N\cdot I}{2L}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Cazuri particulare: Solenoid foarte lung, şi diametru foarte mic, iar punctul P se află în interiorul solenoidului departe de capetele acestuia. Rezultă: $\theta_2 \to 0$; $\theta_1 \to \pi$;

$$H = NI/L \; ; \quad B = \mu H \; ; \quad B = \mu NI/L \; .$$

4.25. Să se verifice prin calcul principiul acţiunilor reciproce pentru interacţiunea cîmpurilor magnetice ale curenţilor din două conductoare paralele. Cu aceeaşi lungime L aflate la distanţa d, parcurse de curenţii I_1 respectiv I_2.



R.: Forţa care acţionează asupra unui conductor liniar, cu lungimea L, parcurs de un curent I, şi aflat într-un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}$, are expresia:

$$\vec{F} = I\cdot\vec{L}\times\vec{B} \quad \text{sau} \quad \vec{F} = L\,\vec{I}\times\vec{B}$$

$\vec{I}$ = vector de modul egal cu intensitatea I a curentului şi a cărui sens este dat de sensul curentului.

$\vec{L}$ = vector de modul egal cu lungimea conductorului şi al cărui sens este dat de sensul curentului. Din fig.rezultă:

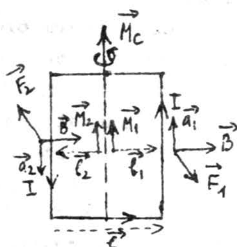
$$\vec{F}_{12} = L\,\vec{I}_2\times\vec{B}_1 \; ; \quad \vec{B}_1 = -\frac{I_1}{2\pi d}\vec{i} \; ; \quad \vec{I}_2 = I_2\vec{k} \; ;$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2 L}{2\pi d}\vec{k} \times \vec{i}\ ; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}\ ; \quad \vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2 L}{2\pi d}\vec{j}\ ;$$

$$\vec{F}_{21} = L\,\vec{I}_1 \times \vec{B}_2\ ; \quad \vec{B}_2 = \frac{I_2}{2\pi d}\vec{i}\ ; \quad \vec{I}_1 = I_1\vec{k}\ ;$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{I_1 I_2 L}{2\pi d}\vec{k} \times \vec{i}\ ; \quad \vec{F}_{21} = \frac{I_1 I_2 L}{2\pi d}\vec{j}\ ; \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4.26. Un cadru dreptunghiular cu lungimea „a" şi lăţimea „b" este parcurs de un curent cu intensitatea I. Cadrul, care se poate roti în jurul axului de simetrie longitudinal, este aşezat într-un cîmp magnetic uniform, al cărui vector inducţie magnetică $\vec{B}$ este paralel cu planul cadrului, fiind perpendicular pe lungimea dreptunghiului. Să se calculeze momentul cuplului forţelor care acţionează asupra cadrului.



R.: Din figură rezultă relaţiile:

$$\vec{F}_1 = I\cdot\vec{a}_1 \times \vec{B}\ ; \quad \vec{F}_2 = I\cdot\vec{a}_2 \times \vec{B}\ ;$$

$$a_1 = a_2 = a\ ; \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 0$$

$$\vec{M}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{F}_1\ ; \quad \vec{M}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{F}_2\ ;$$

$$b_1 = b_2 = b/2\ ; \quad \vec{b}_1 = -\vec{b}_2 = \frac{1}{2}\vec{b}\ ;$$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_1 + \vec{M}_2\ ;$$

$$\vec{M}_C = \vec{b}_1 \times (I\,\vec{a}_1 \times \vec{B}) + \vec{b}_2 \times (I\vec{a}_2 \times \vec{B})\ ;$$

$$\vec{M}_C = 2\,\vec{b}_1 \times (I\,\vec{a}_1 \times \vec{B})\ ; \quad \vec{M}_C = \vec{b} \times (I\,\vec{a}_1 \times \vec{B})\ ;$$

$$\vec{M}_C = I\,\vec{b} \times (\vec{a}_1 \times \vec{B})$$

Se aplică proprietatea produsului dublu vectorial:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Rezultă

$$\vec{M}_C = I\left[(\vec{b}\cdot\vec{B})\cdot\vec{a}_1 - (\vec{b}\cdot\vec{a}_1)\cdot\vec{B}\right]\ ;$$

$$\vec{b}\cdot\vec{B} = b\,B\cos 0^\circ = b\,B$$

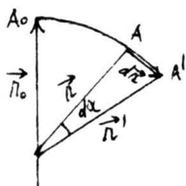
$$\vec{b}\cdot\vec{a}_1 = b\,a_1\cos\frac{\pi}{2} = 0\ ; \quad \vec{M}_C = I\cdot b\cdot B\cdot\vec{a}_1$$

Dacă se notează cu $\vec{i}$ versorul vectorului $\vec{a}_1$, $\vec{a}_1 = a_1\vec{i} = a\,\vec{i}$ putem scrie $\vec{M}_C = I\cdot a\cdot b\cdot B\cdot\vec{i}$. Fie $\vec{j}$ versorul vectorului $\vec{B}$

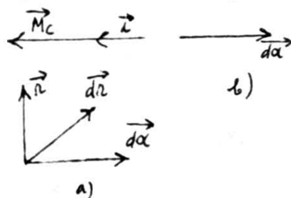
şi $\vec{n}$ versorul normalei la suprafaţa cadrului; rezultă $\vec{i} = \vec{n} \times \vec{j}$, $\vec{M}_C = I\cdot a\cdot b\cdot B(\vec{n} \times \vec{j}) = I(S\vec{n}) \times (B\vec{j})$, în care $\vec{S} = S\vec{n}$, $\vec{B} = B\vec{j}$ $\Rightarrow$ $\vec{M}_C = I\vec{S} \times \vec{B}$; Vectorul $\vec{m} = I\vec{S}$ = moment magnetic al circuitului. Deci, $\vec{M}_C = \vec{m} \times \vec{B}$. Această relaţie este valabilă oricare ar fi forma geometrică a conturului.

4.27. Să se calculeze energia potenţială de interacţiune dintre un circuit de curent electric şi cîmpul magnetic în care acesta se află.

R.: Unui sistem fizic ale cărui elemente interacţionează prin forţe magnetice, i se poate asocia o mărime fizică pe care o vom numi energie potenţială magnetică. Considerăm interacţiunea cîmpului magnetic al curentului dintr-un cadru dreptunghiular şi un cîmp magnetic uniform, caracterizat de vectorul inducţie magnetică $\vec{B} = \overrightarrow{const}$. Rezultatul interacţiunii asupra cadrului se manifestă printr-un cuplu de forţe, al cărui moment este (v. problema 4.26) $\vec{M}_C = \vec{m} \times \vec{B}$. Deoarece vectorul $\vec{m} = I\cdot\vec{S} = IS\vec{n}$ este perpendicular pe planul cadrului, rotirea planului cadrului sub acţiunea cuplului de forţe cu un unghi "$d\alpha$", va antrena şi rotirea vectorului $\vec{m}$ cu acelaşi unghi. Unghiul $d\alpha$ fiind foarte mic, din desen rezultă: $\widehat{AA'} \cong AA'$; $r.d\alpha = dr$. Se poate considera $\vec{dr} \perp \vec{r}$. Mărimea $dr = r\cdot d\alpha$ reprezintă modulul vectorului $\vec{dr}$, iar r este modulul vectorului $\vec{r}$.



Considerînd că şi $d\alpha$ este modulul unui vector $\vec{d\alpha}$ cu proprietatea $\vec{d\alpha} \perp \vec{r}$ (v.fig.), atunci mărimea $dr = r\cdot d\alpha$ reprezintă modulul vectorului: $\vec{dr} = \vec{r} \times \vec{d\alpha}$. Deoarece vectorii $\vec{M}_C$ şi $\vec{d\alpha}$ sînt antiparaleli (regula burghiului) (v.fig.b) rezultă:



$\vec{d\alpha} = -d\alpha\,\vec{i}$. Rotirea planului cadrului cu unghiul $d\alpha$, presupune efectuarea unui lucru mecanic elementar $dL = 2\,\vec{F}\cdot\vec{dr}$. Factorul 2 apare deoarece lucrul mecanic este efectuat de cele 2 forţe ale cuplului. $dL = 2\vec{F}(\vec{r} \times \vec{d\alpha})$.

Se cunoaşte proprietatea produsului mixt:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

Rezultă:

$$dL = 2\,\vec{d\alpha}\,(\vec{F}\times\vec{r}) = -2\cdot\vec{d\alpha}\,(\vec{r}\times\vec{F}) = -\vec{d\alpha}\cdot 2(\vec{r}\times\vec{F});$$

$$dL = -\vec{d\alpha}\cdot\vec{M}_C = d\alpha\;\vec{i}\cdot\vec{M}_C\;;\; dL = d\alpha\cdot\vec{i}\;M_C\vec{i}\;;$$

$$dL = M_C\,d\alpha\;;\;\vec{M}_C = \vec{m}\times\vec{B}\;;\;M_C = m.B.\sin(\vec{m},\vec{B});$$

$$M_C = m\,B\sin\beta\;;\quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha\;;$$

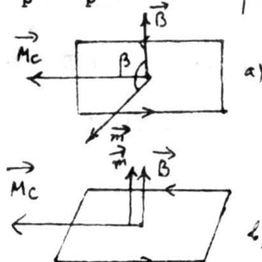
$$d\beta = -d\alpha\;;\qquad dL = -\,m\,B\sin\beta\cdot d\beta$$

β = unghiul dintre momentul magnetic al circuitului $\vec{M}$ şi inducţia cîmpului magnetic $\vec{B}$.

In intervalul de timp în care s-a efectuat lucrul mecanic elementar dL, energia potenţială magnetică a sistemului s-a modificat cu cantitatea dW_p. Considerînd că forţele care au efectuat lucrul mecanic dL sînt conservative, putem scrie:

$$dW_p = -dL = M.B\sin\beta\cdot d\beta\;;\;\int_{W_p^o}^{W_p} dW_p = m\,B\int_{\pi/2}^{\beta}\sin\beta\;\cdot d\beta\,.$$

Stabilirea limitelor de integrare s-a făcut în raport cu poziţia de referinţă A_o. Dacă la momentul iniţial cadrul ar ocupa poziţia de referinţă A_o, atunci energia potenţială magnetică are valoarea W_p^o, iar $\beta = \pi/2$. Corespunzător situaţiei finale, reprezentate prin poziţia A, energia potenţială magnetică are valoarea W_p, iar unghiul dintre $\vec{m}$ şi $\vec{B}$ este β. Rezultă $W_p - W_p^o = -m\,B\cos\beta$; $W_p - W_p^o = -\vec{m}\,.\,\vec{B}$. Vom considera că energia potenţială magnetică a stării de referinţă este nulă: $W_p^o = 0$.

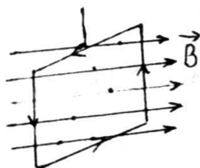


Rezultă: $W_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ (1)

Elementele sistemului care interacţionează prin cîmpuri magnetice au tendinţa de a evolua spre o <u>stare de echilibru</u> în care energia potenţială magnetică să fie <u>minimă</u>. Desenul a) reprezintă poziţia iniţială a cadrului în cîmp magnetic ($\beta = 90^o$; $W_p = 0$). Desenul b) reprezintă poziţia finală, de echilibru a cadrului în cîmp magnetic ($\beta = 0$; $W_p = -m\,B = W_p^{min.}$). Formula (1) este valabilă pentru orice

circuit electric, indiferent de forma geometrică a conturului.

4.28. Desenul din figură reprezintă un cadru dreptunghiular cu laturile a şi b, parcurs de un curent I, suspendat



printr-un fir între două piese polare ale unui magnet, într-un cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ = const.

a) Poziţia din desen este de echilibru stabil a cadrului?

b) Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a roti cadrul cu 180^{o} în jurul firului de suspensie?

R.: a) Cadrul este în echilibru stabil deoarece vectorii $\vec{m}$ şi $\vec{B}$ în această poziţie au aceeaşi orientare şi deci

$$W_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m \cdot B = W_p^{minim}$$

b) După rotirea cadrului cu 180^{o} se obţine

$$W_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m \cdot B \cdot \cos 180^{o} = m \cdot B$$

In starea iniţială

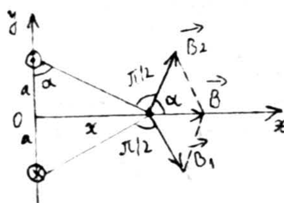
$$W_p^{o} = -m \cdot B \cos 0^{o} = -m \cdot B .$$

Lucrul mecanic ce trebuie efectuat corespunde diferenţei celor două energii potenţiale.

Deoarece

$$W_p > W_p^{o} \Rightarrow L = W_p - W_p^{o} = 2\ mB = 2\ abIB$$

4.29. Fie două conductoare lungi, paralele perpendiculare pe planul xOy, prin care circulă curenţii cu aceeaşi intensitate I, dar în sensuri opuse. Să se găsească: a) expresia inducţiei



magnetice B într-un punct aflat pe axa Ox; b) valoarea lui x pentru care B este maxim şi valoarea maximă a lui B.

R.: a) Din figură rezultă că

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2+a^2}} = B_2 \text{ şi } B=(B_1+B_2)\cos\alpha$$

$$B = \frac{2\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2+a^2)}$$

b) Din condiţia ca $\frac{dB}{dx} = 0$ rezultă x = 0, adică

$$B_{max} = \mu_0 I/\pi a$$

4.30. Două conductoare rectilinii foarte lungi se găsesc la distanţa d unul de celălalt în vid. Conductoarele sînt parcurse în acelaşi sens de curenţii I_1 şi I_2. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pe unitatea de lungime a conductoarelor pentru a le îndepărta la distanţa e.d (e = baza logaritmilor naturali).

R.: Forţa de interacţiune are expresia:

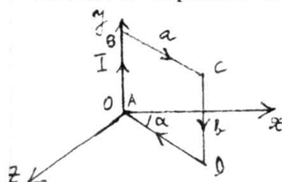
$F = \mu_0 I_1 I_2 \ell / 2\pi x$. Lucrul mecanic elementar:

$$dL = F(x).dx \Rightarrow L = \int dL = \mu_0 I_1 I_2 \ell / 2\pi \int_d^{ed} \frac{dx}{x} ;$$

$$L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_d^{ed} ; \ln(ed) - \ln d = 1 ;$$

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2$$

4.31. Cadrul dreptunghiular din figură se poate roti în jurul axei Oy şi este parcurs de un curent cu intensitatea I. Să se calculeze: a) forţa exercitată asupra fiecărei laturi şi momentul cuplului de forţe necesar menţinerii lui în poziţia din figură, dacă cadrul se află într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $\vec{B}$, paralel cu Ox; b) forţa exercitată asupra laturilor cadrului şi momentul cuplului dacă $\vec{B}$ este orientată paralel cu axa Oz; c) momentul forţei cînd cadrul se poate roti în jurul unei axe care trece prin centrul cadrului şi este paralelă cu Oy.



Date numerice: I = 10 A, B = 0,2 T, a = 0,6 m, b = 0,8 m, = 30^o.

R.: a) $F_{AB} = F_{CD} = B\ I\ b = 0,16$ N

$F_{BC} = F_{AD} = B\ I\ a\ \sin\alpha = 0,03$ N

Rotaţia în jurul axei Oy o produce momentul forţei $\vec{M}$ ce acţionează perpendicular pe CD. Forţele care acţionează asupra laturilor BC şi AD deformează cadrul.

$$M = F_{CD} \cdot a = 96 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.}$$

b) F_{AB} şi F_{CD} rămîn neschimbate, iar $F_{BC} = F_{AD} =$

$= B\,I\,a\,\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

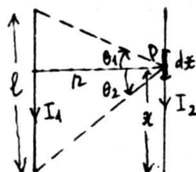
$F_{BC} = F_{AD} = 3\sqrt{3}\cdot 10^{-2}$ N ; $M = F_{CD}\,a = 96\cdot 10^{-4}$ N·m

c) Momentul rămîne acelaşi:

$$M = \frac{a}{2}(F_{CD} + F_{AD}) = F_{CD}\,a = 96\cdot 10^{-4}\ \text{N·m}$$

4.32. Să se calculeze forţa de interacţiune dintre două porţiuni rectilinii paralele şi egale de lungime ℓ străbătute de curenţi avînd intensităţile I_1 şi I_2.

Ce devine această forţă în cazul cînd conductoarele sînt infinit de lungi?



R.: Curentul I_1 creează în punctul P situat la distanţa r de conductorul străbătut de I_1, inducţia B_1 de modul (v.problema 4.3).

$$B_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) =$$

$$= \frac{\mu I_1}{4\pi r}\left(\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} - \frac{\ell-x}{\sqrt{r^2+(\ell-x)^2}}\right)$$

Forţa elementară dF_{12} cu care inducţia $\vec{B}$ acţionează asupra unui element dx al conductorului este $dF_{12} = B\,I_2 dx$, iar forţa totală va fi

$$F = \int_0^{\ell} dF_{12} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi r}\left(\int_0^{\ell}\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2+x^2}} - \int_0^{\ell}\frac{\ell-x}{\sqrt{r^2+(\ -x)^2}}\,dx\right)$$

După efectuarea integralelor rezultă

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r}\left(\sqrt{1+r^2/\ell^2} + r/\ell\right)$$

Cînd conductoarele sînt infinit de lungi forţa devine

$$F = \mu I_1 I_2\ /2\pi r$$

4.33. Curba de magnetizare a Fe este descrisă de permeabilitatea magnetică absolută:

$\mu = \frac{1}{H}\exp\left[H/(a+b\,H)\right]$, în care H este intensitatea cîmpului magnetic exterior, iar a şi b constante pozitive. Care este domeniul valorilor pentru b, astfel încît permeabilitatea

μ să aibă valori extreme?

R.: Calculăm derivata

$$\frac{d\mu}{dH} = \frac{\left(e^{H/(a+bH)}\right)' H - e^{H/(a+bH)}}{H^2}$$

$$\left(e^{H/(a+bH)}\right)' = e^{H/(a+bH)} \cdot \frac{a + bH - bH}{(a+bH)^2}$$

Din anularea derivatei, după simplificări rezultă:

$b^2H^2 + (2\,ab-a)H + a^2 = 0$. Rezultă

$$H_{12} = \frac{(a-2ab) \pm a\sqrt{1-4\,b}}{2\,b^2}$$. Se impune condiția

$$1 - 4b > 0 \Rightarrow 0 < b < \frac{1}{4}$$

4.34. Un proton pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\vec{B} = \overrightarrow{const.}$, viteza $\vec{v}_0$ a protonului la intrare în cîmp făcînd cu vectorul $\vec{B}$ un unghi α. Traiectoria descrisă de proton este o elicoidă cu raza R și pasul h. Se dau: masa m a protonului și sarcina e. Să se arate că energia cinetică a protonului nu se modifică la trecerea prin cîmpul magnetic.

R.: Fie $\vec{v}_0$ viteza de intrare a protonului și unghiul α dintre $\vec{v}_0$ și $\vec{B}$.

$v_1 = v_0 \cos\alpha$; $v_2 = v_0 \sin\alpha$

Din definiția forței Lorentz rezultă:

$v_2 e B = m\, v_2^2/R$, $v_2 = B R e/m$

Pasul traiectoriei este, prin definiție, $h = v_1 T$ în care T = perioada de rotație a protonului.

Expresia lui T este $T = 2\pi R/v_2$. Rezultă:

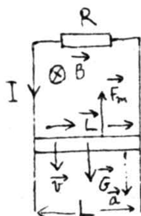
$v_1 = h/T = v_2 h/2\pi R = B\, e\, h/2\pi m$

Deci,

$$(1) \qquad E_c = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\,(v_1^2+v_2^2) = \frac{B^2e^2}{m^2}\left(\frac{h^2}{4\pi^2} + R^2\right) = const.$$

Deci, energia cinetică la ieșire din cîmp este egală cu energia cinetică la intrare în cîmp, avînd tot timpul aceeași valoare (1).

4.35. O bară metalică omogenă de rezistenţă electrică neglijabilă cu lungimea L şi masa m, alunecă fără frecare de-a lungul a două bare fixe şi identice perfect conductoare, paralele, plasate în plan vertical şi legate prin intermediul unui rezistor de rezistenţă R. Perpendicular pe planul barelor acţionează un cîmp magnetic uniform de inducţie $\vec{B}$. Considerînd că la t = 0 bara mobilă este lăsată să cadă sub efectul greutăţii ei de-a lungul barelor fine să se determine viteza limită (maximă) a barei mobile.



R.: La un moment $t > 0$ putem scrie ecuaţia Newton: $ma = G - F_m$; $G = mg$; Apare în plus forţa magnetică F_m a cărei expunere este: $\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$. Mişcîndu-se în cîmpul magnetic $\vec{B}$, are loc o variaţie a fluxului magnetic ϕ (prin variaţia suprafeţei circuitului), care determină în acesta apariţia unei tensiuni electro-motoare $\mathcal{E} = B \cdot L \cdot v = I\,R$.

Rezultă: $F_m = I \cdot L \cdot B = \dfrac{v\,L^2B^2}{R}$. Deoarece $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g - \frac{v\,L^2B^2}{R} \Rightarrow \frac{dv}{v - \frac{m\,g\,R}{L^2B^2}} = -\frac{L^2B^2}{mR}\cdot dt$$

Integrînd avem:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{m\,g\,R}{L^2B^2}} = -\frac{L^2B^2}{mR}\int_0^t dt \qquad \text{sau}$$

$$\ln\frac{v - \frac{m\,g\,R}{L^2B^2}}{\frac{m\,g\,R}{L^2B^2}} = -\frac{L^2B^2}{mR}\,t \Rightarrow v(t) = \frac{m\,g\,R}{L^2B^2}\left(1 - e^{-\frac{L^2B^2}{mR}t}\right)$$

Valoarea maximă a vitezei barei, este:

$$v_{max} = \lim_{t \to \infty} v(x) = \frac{m\,g\,R}{L^2B^2}$$

4.36. O spiră conductoare de diametru D, fixă se găseşte într-un cîmp magnetic, a cărui inducţie $\vec{B}$ variază în timp după legea $B = B_m \sin \omega t$. Normala $\vec{n}$ face un unghi constant θ cu vectorul $\vec{B}$. Se cer:

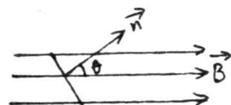
a) t.e.m. maximă indusă în spiră;

b) intensitatea maximă a curentului, I_m care apare în spiră, aceasta avînd o rezistenţă R;

c) sarcina electrică care străbate secţiumea normală a conductorului din care este confecţionată spira la momentele $t_1 = 0$ şi $t_2 = T/4$;

d) valorile maximă respectiv minimă a puterii medii calculată în timp de o perioadă T, disipată în spira conductoare.

Se va considera $\theta \in [0,\pi]$. Date numerice: $d = 0,1$ m, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $f = 50$ Hz; $B_m = 0,8$ Wb/m^2 şi $R = 2\,\Omega$.



R.: a) Expresia fluxului magnetic prin spiră:

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot\cos\theta = B_m\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta\cdot$$

$$\cdot\sin\omega t = \phi_m\sin\omega t;\quad \phi_m = B_m S\cos\theta$$

t.e.m. indusă în spiră:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega\cdot\phi_m\cdot\cos\omega t = -B_m\cdot S\cdot\omega\cdot\cos\theta\cdot\cos\omega t =$$

$$= E_m\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).\ \text{Deci}$$

$$E_m = B_m\cdot S\cdot\omega\cdot\cos\theta$$

b) Valoarea instantanee a curentului indus în spiră este:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_m\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Deci,

$$I_m = E_m/R = (B_m\cdot S/R)\cdot\omega\cdot\cos\theta$$

c) Sarcina electrică elementară care străbate secţiunea normală a spirei este:

$$dQ = i\cdot dt = \frac{e}{R}\,dt = -\frac{1}{R}\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot dt = -\frac{1}{R}\cdot d\phi$$

$$d\phi = \phi_m\cdot\omega\cdot\cos\omega t\cdot dt = B_m\cdot S\cdot\omega\cdot\cos\theta\cdot\cos\omega t\cdot dt$$

$$dQ = -\frac{B_m\cdot S}{R}\cdot\omega\cdot\cos\theta\cdot\cos\omega t\cdot dt$$

$$Q = \int_0^{T/4} dQ = -\frac{B_m\cdot S}{R}\cdot\omega\cdot\cos\theta\int_0^{T/4}\cos\omega t\cdot dt =$$

$$= -\frac{B_m\cdot S}{R}\cdot\cos\theta\cdot\sin\omega t\Big|_0^{T/4} =$$

$$= - \frac{B_m \cdot S}{R} \cdot \cos\theta \cdot \sin\frac{\omega T}{4} = - \frac{B_m \cdot S}{R} \cos\theta, \qquad = \frac{2\pi}{T}$$

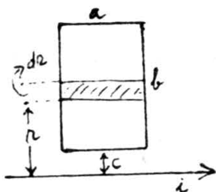
d) $$P = \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot i^2 \cdot dt = \frac{R_m \cdot I_m}{2} = \frac{R \cdot I_m^2}{2} = \frac{R}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{B_m^2 \cdot S^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\theta}{R^2} = \frac{B_m^2 \cdot S^2 \cdot \omega^2}{4 R} (1 + \cos 2\theta)$$

Cînd $\theta = \frac{\pi}{2}$, $P_{min} = 0$. Cînd $\theta = 0$ sau π

$$P_{max} = \frac{B_m^2 \cdot S^2 \cdot \omega^2}{2 R}$$

<u>4.37</u>. Un conductor rectiliniu lung este străbătut de un curent variabil $i = \sqrt{2} \cdot 10 \sin\omega t$, de frecvenţă 50 Hz. Să se determine t.e.m. maximă indusă într-o spiră dreptunghiulară de laturi $a = 0{,}1$ m şi $b = 0{,}45$ m, aşezat la distanţa $c = 0{,}05$ m de conductor, într-un plan care conţine conductorul. Spira se află în aer.



<u>R</u>.: Fie <u>suprafaţa elementară</u> $dS = a \cdot dr$ la distanţa r de conductor şi fie $d\phi$ <u>fluxul magnetic elementar</u> prin această suprafaţă:

$d\phi = B \cdot dS \cdot \cos\theta$. θ reprezintă unghiul dintre normala $\vec{n}$ la suprafaţa dS şi vectorul inducţie $\vec{B}$. $\vec{B}$ este tangent la linia de cîmp magnetic circulară, concentrică cu conductorul rectiliniu şi care se află într-un plan perpendicular pe planul spirei. Deci $\cos\theta = \cos 0 = 1$. Valoarea fluxului magnetic prin suprafaţa spirei este

$$\phi = \int d\phi = a\,\mu_0 \frac{i}{2\pi}\int_c^{b+c}\frac{dr}{r} = a\,\mu_0\frac{i}{2\pi} \cdot \ln r \Big|_c^{b+c} =$$

$$= \frac{a\,\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{b+c}{c} = \frac{a\,\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\frac{b+c}{c} \cdot \sqrt{2}\, I \sin\omega t$$

T.e.m. indusă în spiră este:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cdot a\,\mu_0 \cdot \omega \cdot I \cdot \ln\frac{b+c}{c} \cdot \cos\omega t =$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a \mu_0 \omega I \cdot \ln \frac{b+c}{c} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Deci, $E_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a \mu_0 \omega I \cdot \ln \frac{b+c}{c} = \sqrt{2} a . \mu_0 f \cdot I \cdot \ln \frac{b+c}{c}$

I = valoarea efectivă a curentului alternativ i.

După înlocuirea datelor $E_{max} = 0,2 \cdot 10^{-3}$ V.

4.38. Intr-un cîmp magnetic omogen se rotește o bobină cu frecvența f. Fluxul magnetic maxim ce o străbate este ϕ_{max}. Curentul electric ce produce cîmpul magnetic inductor este un curent alternativ sinusoidal, avînd frecvența $f_1 = 2f$. Să se determine valoarea maximă a t.e.m. induse în bobină. Faza inițială a curentului inductor și a mișcării de rotație este nulă. Aplicație: f = 50 Hz și $\phi_{max} = 0,9$ Wb.

R.: Fluxul magnetic ce traversează spira se scrie:

$\phi = B \cdot S \cdot \cos\theta$; $B = B_0 \cos \omega t$ în care $\omega = 2\pi f$ este viteza unghiulară de rotație a bobinei, $\omega_1 = 2\pi f_1 = 4\pi f = 2\omega$ este pulsația curentului electric inductor, $\theta = \omega_1 t$ și $\phi_{max} = B_0 S = 0,9$ Wb. Deci, $\phi = \phi_{max} \cdot \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t$.

T.e.m. indusă:

(1) $e = -\frac{d\phi}{dt} = \omega \phi_{max}(\sin \omega t \cos 2\omega t + 2 \cos \omega t \cdot \sin 2\omega t)$

Să aflăm extremele lui e(t).

$\frac{de}{dt} = \omega^2 \phi_{max} (5 \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t - 4 \sin \omega t \cdot \sin 2\omega t)$

Anulînd derivata, rezultă ecuația trigonometrică:

$5 \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t - 4 \sin \omega t \cdot \sin 2\omega t = 0$

Utilizînd relațiile:

$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t \cdot \sin^2 \omega t$, $\sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t$

rezultă ecuația

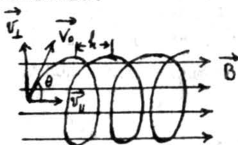
$5(1-2 \sin^2 \omega t) - 8 \sin^2 \omega t = 0 \Rightarrow \sin \omega t = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2}}$ și

$\cos \omega t = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{13}{2}}$. Pentru aceste valori funcția e(t) este maximă (se verifică cu ajutorul derivatei de ordinul doi $\frac{d^2e}{dt^2}$) în valoare absolută. Inlocuind aceste valori în ecuația (1) rezultă

$$\left|E_{max}\right| = \frac{10}{9}\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\omega\cdot\Phi_{max} = \frac{20\pi}{9}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot f\cdot\Phi_{max}$$

Numeric $\Rightarrow$ $\left|E_{max}\right| = 497$ V.

4.39. Un proton avînd viteza inițială v_0 pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$ = $\overrightarrow{const.}$, sub un unghi θ dat, față de liniile de cîmp. Să se calculeze: a) raza R și b) pasul elicoidei h pe care se mișcă protonul în cîmp. Se consideră cunoscute mărimile: sarcina protonului $q = |e|$ și masa acestuia.



R.: Forța exercitată asupra protonului este forța Lorentz

$\vec{F}_L = q(\vec{v}_0 \times \vec{B})$ cu $F_L = q\cdot v_\perp \cdot B$ cu

$v_\perp = v_0 \sin\theta$ (v.figura)

Forța $\vec{F}_L$ este tot timpul orientată perpendicular pe $\vec{B}$; componenta

$v_\parallel = v_0 \cos\theta$, paralelă cu liniile de cîmp nu se modifică. In planul perpendicular pe $\vec{B}$ proiecția traiectoriei particulei este un cerc de rază R, care se determină din condiția egalității dintre forța centripetă și Lorentz:

$$q.v.B = mv^2/R \Rightarrow R = \frac{mv_0}{q\cdot B}\sin\theta$$

b) Perioada mișcării de rotație $T = 2\pi R/v_\perp = 2\pi m/q.B$. Traiectoria este o curbă elicoidală deoarece există și o componentă paralelă $v_\parallel$ a vitezei. Pasul h al elicoidei se obține astfel

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv_0 \sin\theta}{qB}\ ;\ h = v_\parallel\cdot T = v_\parallel\cdot\frac{2\pi B}{v_\perp} = 2\pi R\cdot\mathrm{ctg}\,\theta$$

Pentru $\theta = 0$, $F_L = 0 \Rightarrow$ mișcarea este rectilinie și uniformă. Pentru $\theta = \pi/2$, $F_L = qv_0B \Rightarrow$ traiectoria este circulară într-un plan perpendicular pe $\vec{B}$.

5. INDUCTIA ELECTROMAGNETICA

5.1. In figură este reprezentat schematic un debitmetru electromagnetic pentru lichide conductoare. Conducta prin care curge lichidul, avînd diametrul interior d = 10 cm este plasată între polii unui magnet ce produce un cîmp magnetic omogen, de inducție $B = 5\cdot10^{-2}$ T, perpendicular pe axa conductei. La capetele unui diametru al secțiunii conductei, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, sînt plasați 2 electrozi a și b între care se măsoară o diferență de potențial U = 0,5 mV. Se cere debitul de volum Q_V al lichidului care parcurge debitmetrul.

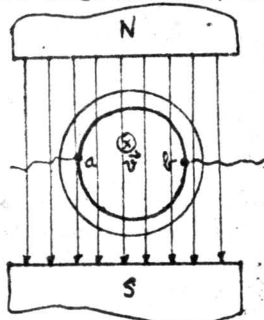


Fig. 5.1.

R.: Stratul de lichid conductor ce curge de-a lungul diametrului orizontal al secțiunii conductei este echivalent cu un conductor de lungime egală cu diametrul d al secțiunii conductei și care se deplasează perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, cu o viteză egală cu viteza de curgere a lichidului conductor. Deci la capetele a și b ale diametrului secțiunii conductei apare o diferență de potențial egală cu tensiunea indusă în conductorul echivalent de lungime d:

$$U = B\,d\,v \qquad (1)$$

Viteza de curgere a lichidului conductor se poate exprima în funcție de debitul volumic:

$$v = \frac{Q_V}{S} = \frac{4\,Q_V}{\pi d^2} \qquad (2)$$

Introducînd pe (2) în (1) rezultă

$$Q_V = \frac{\pi\,dU}{4B} = 0{,}786\ \mathrm{dm^3/s}$$

5.2. Un conductor izolat avînd rezistența pe unitatea de lungime $R_\ell = 1\,\Omega/\mathrm{m}$ este aranjat sub forma a două cercuri de raze $r_1 = 20$ cm și $r_2 = 10$ cm ca în figurile 5.2.a și 5.2.b. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic omogen, avînd inducția B perpendiculară pe planul cercurilor și uniform crescătoa-

re în timp cu 0,05 T/s. Se cere: tensiunea între punctele M şi N şi curentul prin conductor în cele două cazuri.

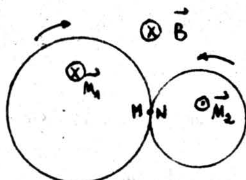


Fig.5.2.a.

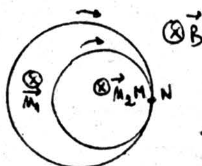


Fig. 5.2.b.

R.: a) Se alege un sens arbitrar de parcurgere al conductorului. Conform regulii burghiului normalele la suprafeţele delimitate de cele două cercuri sînt indicate în figură. Fluxul magnetic ce străbate fiecare cerc este:

$$\Phi_1 = BS_1 \cos(\vec{n}_1, \vec{B}) = \pi r_1^2 B$$

$$\Phi_2 = BS_2 \cos(\vec{n}_2, \vec{B}) = -\pi r_2^2 B$$

Deoarece cîmpul magnetic este variabil, fluxul magnetic ce străbate fiecare cerc este variabil şi deci conform legii lui Faraday în fiecare cerc se induce o tensiune.

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\pi r_1^2 \frac{dB}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \pi r_2^2 \frac{dB}{dt}$$

Schema electrică echivalentă a sistemului este dată în figura 5.2.c., în care rezistenţele celor două cercuri sînt:

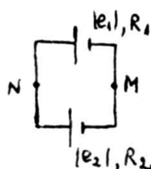


Fig.5.2.c.

$$R_1 = 2\pi r_1 R_\ell$$

$$R_2 = 2\pi r_2 R_\ell$$

Tensiunea între punctele M şi N, conform teoremei Millman este:

$$U_{MN} = -\frac{\frac{|e_1|}{R_1} + \frac{|e_2|}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = -\pi r_1 r_2 \frac{dB}{dt} = -3,14 \text{ mV}$$

Curentul ce trece prin conductor este:

$$I = \frac{e_1+e_2}{R_1+R_2} = -\frac{r_1-r_2}{2R_\ell}\cdot\frac{dB}{dt} = -2{,}5\ \text{mA}$$

b) pentru cazul din fig.5.2.b avem

$$\phi_1 = BS_1\cos(\vec{n}_1,\vec{B}) = \pi r_1^2 B \quad \text{deci} \quad e_1 = -\pi r_1^2\frac{dB}{dt}$$

$$\phi_2 = BS_2\cos(\vec{n}_2,\vec{B}) = \pi r_2^2 B \quad \text{deci} \quad e_2 = -\pi r_2^2\frac{dB}{dt}$$

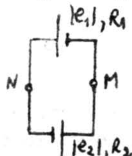


Fig.5.2.d.

Schema electrică echivalentă a sistemului este dată în figura 5.2.d.

Deci tensiunea între punctele M şi N este:

$$U_{MN} = \frac{-\frac{|e_1|}{R_1}+\frac{|e_2|}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = -\pi r_1 r_2\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\cdot\frac{dB}{dt} = -1{,}05\ \text{mV}$$

Curentul ce trece prin conductor:

$$I = \frac{e_1+e_2}{R_1+R_2} = -\frac{r_1^2+r_2^2}{2(r_1+r_2)R_\ell}\cdot\frac{dB}{dt} = -4{,}16\ \text{mA}$$

5.3. Un cadru circular de rază r este rotit într-un cîmp magnetic de inducţie magnetică B. $\vec{B}$ este în direcţia z, iar axa de rotaţie a cadrului este în direcţia x de-a lungul diametrului (figura 5.3). Considerînd că firul cadrului are rezistenţa R, să se afle puterea disipată pe R.

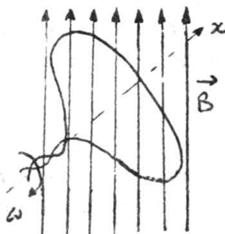


Fig.5.3.

R.: Fluxul magnetic ce străbate cadrul este:

$$\phi = \pi r^2 B\cos\omega t$$

Conform legii lui Faraday tensiunea electromotoare indusă în cadru este:

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \pi r^2 B\omega\sin\omega t$$

Deci curentul electric ce parcurge cadrul este:

Cda 265/1991 Fasc. 13

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{\pi r^2 B \omega}{R} \sin\omega t$$

Puterea disipată în cadrul este chiar puterea medie

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\, i(t)\, dt = \frac{(\pi r^2 B \omega)^2}{R} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\, dt =$$

$$= \frac{(\pi r^2 B \omega)^2}{2R}$$

5.4. O lamă îngustă fixată pe un ax se roteşte solidar cu acesta cu o turaţie ν = 2 rot/s. Capătul lamei este în contact permanent cu un inel fix de rază R = 10 cm. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic omogen de inducţie B = 0,1 T, paralel cu axul, ca în figură. Lama, axul şi inelul sînt din acelaşi material. Se cere tensiunea U_{ab} între inel şi ax.

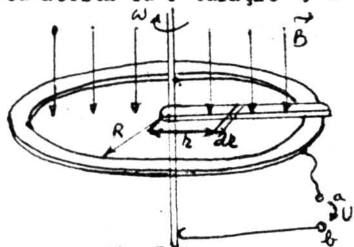


Fig.5.4.

R.: Deoarece lama, axul şi inelul sînt din acelaşi material, tensiunea ce apare între inel şi ax se datorează numai fenomenului de inducţie electromagnetică.

Considerăm pe lamă, un element infinitezimal dr aflat la distanţa r de axul de rotaţie şi care se deplasează cu viteza $v = \omega r$ perpendicular pe liniile de cîmp magnetic. Conform legii lui Faraday la capetele acestui element infinetezimal apare o diferenţă de potenţial:

$$dU = B\, v\, dr = B\omega r\, dr$$

Deci lama aflată în mişcare de rotaţie poate fi considerată ca fiind formată dintr-un număr infinit de surse elementare cu t.e.m. dU, înseriate:

$$U_{ab} = \int_0^R B\omega r\, dr = \frac{B\omega R^2}{2}$$

Inlocuind valorile numerice obţinem U_{ab} = 6,28 mV.

5.5. Pe un inel conductor (de rezistenţă foarte mică) cu diametrul D = 20 cm (figura 5.5.a) alunecă capetele CC' ale unei bare conductoare fixate de un ax conductor perpendicular

pe centrul inelului, ax care se rotește cu turația constantă $n = 300$ rot/min. Rezistența barei este $r = 0,2\,\Omega$. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic uniform cu inducția $B = 10^{-2}$T, paralelă cu axul. Intre inel și ax este legat un rezistor cu rezistența $R = 0,2\,\Omega$. Să se determine puterea disipată în rezistor.

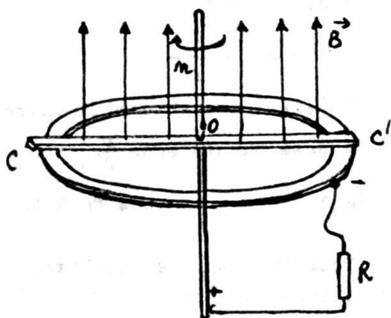


Fig.5.5.a.

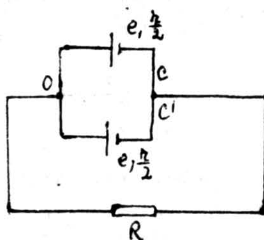


Fig.5.5.b.

R.: Schema electrică echivalentă a sistemului este redată în figura 5.5.b.

Tensiunea electromotoare indusă între capetele C și O, precum și între C' și O este conform problemei precedente

$$e = \frac{\pi B n D^2}{4}$$

Curentul ce străbate rezistorul R este

$$I = \frac{e}{R + \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2}} = \frac{\pi B n D^2}{4 R + r}$$

Deci putem calcula puterea disipată prin rezistorul R

$$P = I^2 R = R\left(\frac{\pi B n D^2}{4 R + r}\right)^2 = 1,97 \ \mu W$$

5.6. Pe un inel conductor cu diametrul $D = 20$ cm se fixează două bare conductoare în formă de cruce (figura 5.6.a). Roata astfel formată se rotește cu turația constantă $n = 180$ rot/ /min. Rezistența fiecărei bare este $r = 0,4\,\Omega$. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic uniform cu inducția $B = 10^{-2}$T paralelă cu axul. Intre inel și ax este legat un rezistor cu rezistența $R = 1,2\,\Omega$. Să se determine valoarea curentului elec-

tric ce trece prin rezistor.

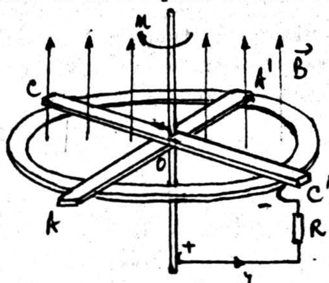


Fig.5.6.a.

R.: Intre perechile de puncte A şi O, C şi O, A' şi O, precum şi C' şi O apare aceeaşi tensiune electromotoare indusă

$$e = \frac{\pi B n D^2}{4}.$$

Rezistenţa electrică între aceste puncte este $\frac{r}{2}$.

Schema electrică echivalentă a sistemului este dată în figura 5.6.b.

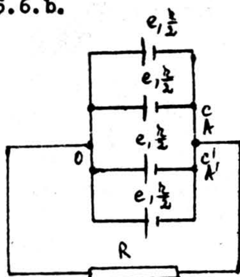


Fig.5.6.b.

Deci curentul ce străbate rezistorul R este

$$I = \frac{e}{R + \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{2}} = \frac{2\pi B n D^2}{8 R + r} = 753,6 \ \mu A$$

5.7. Două bare identice, de lungime ℓ, se rotesc, fără să se incomodeze reciproc pe un cerc metalic, cu vitezele unghiulare ω_1 şi ω_2, într-un cîmp magnetic de inducţie B, conform figurii. Barele au rezistenţa R fiecare, iar rezistenţa cercului se neglijează. Intre cercul metalic şi ax este legat un rezistor cu rezistenţa R_s. Să se determine intensitatea curentului indus ce trece prin rezistorul R_s.

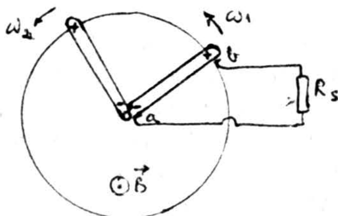


Fig.5.7.a.

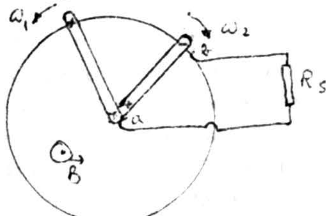


Fig.5.7.b.

R.: Conform regulii mîinii drepte polaritățile capetelor barelor sînt cele din figură. Tensiunea electromotoare indusă în bara ce se rotește cu viteza unghiulară ω_1 este

$$e_1 = \frac{B\omega_1 \ell^2}{2}$$

iar în cea care se rotește cu viteza unghiulară ω_2 este

$$e_2 = \frac{B\omega_2 \ell^2}{2} \quad \text{(conform problemei 5.4).}$$

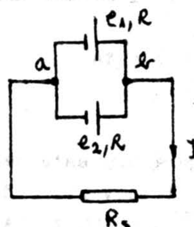


Fig.5.7.c.

a) Schema electrică echivalentă a sistemului este dată în figura 5.7.c.

Tensiunea electrică între punctele b și a conform teoremei Millman este:

$$U_{ba} = \frac{\frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{e_1 + e_2}{2} = \frac{B\ell^2}{4}(\omega_1 + \omega_2)$$

Intensitatea curentului electric ce trece prin rezistorul R_s este

$$I = \frac{U_{ba}}{R_s} = \frac{B\ell^2(\omega_1 + \omega_2)}{4R_s}$$

b) Schema electrică echivalentă a sistemului este dată în figura 5.7.d.

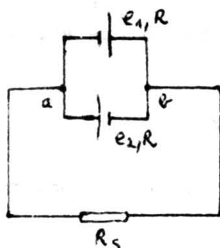


Fig.5.7.d.

Tensiunea electrică între punctele a și b este dată de relația

$$U_{ab} = \frac{\frac{e_2}{R} - \frac{e_1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{e_2 - e_1}{2} = \frac{B\ell^2}{4}(\omega_2 - \omega_1)$$

Deci se poate scrie intensitatea curentului electric ce parcurge rezistorul R_s, astfel:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_s} = \frac{B\ell^2}{4R_s}(\omega_2 - \omega_1)$$

5.8. Un disc conductor avînd raza $R = 6$ cm se rotește cu o viteză unghiulară $\omega = 10$ rad/s într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 0,2$ T, orientat paralel cu axul discului, ca în figură. Să se calculeze tensiunea U_{ab} ce apare între două

perii, în contact cu periferia discului şi respectiv, cu axul acestuia, realizat de asemenea dintr-un material conductor.

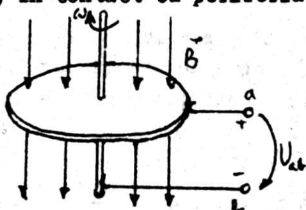


Fig. 5.8.

R.: Fiecare rază de pe discul conductor ce se roteşte în cîmp magnetic poate fi considerată ca o sursă de t.e.m. egală cu tensiunea indusă

$$e = \frac{B\omega R^2}{2}$$

Deci discul poate fi considerat ca fiind format dintr-o infinitate de astfel de surse în paralel.

Astfel tensiunea între punctele a şi b este

$$U_{ab} = e = \frac{B\omega R^2}{2} = 3,6 \text{ mV}$$

5.9. Conductorul rectiliniu din figura 5.9 este parcurs de un curent alternativ a cărui intensitate variază după legea $i = 10\sqrt{2} \sin 100 t$ A. Să se scrie t.e.m. indusă în cadrul dreptunghiular.

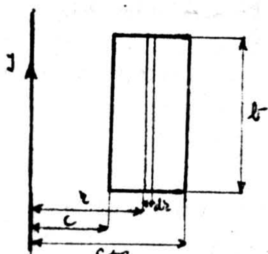


Fig. 5.9.

R.: Se consideră un element infinitezimal de arie dS = b dr aflat la distanţa r de conductor. Fluxul ce străbate acest element de arie este

$$d\phi = B\, dS = \frac{\mu_0 i\, b}{2\pi r} dr$$

Fluxul magnetic ce străbate cadrul este:

$$\phi = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 i\, b}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i\, b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c}$$

Tensiunea electromotoare indusă în cadru, conform legii lui Faraday:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{c} \frac{di}{dt} = -41,6\sqrt{2} \cos 100 t \quad \mu V$$

5.10. O bobină avînd inductivitatea L = 1 mH şi rezistenţa R = 1 Ω este parcursă de un curent avînd intensitatea I = 1 A. Se scurtcircuitează brusc bornele bobinei. Să se sta-

bilească legea de variație în timp a curentului și să se calculeze căldura totală dezvoltată în bobină după scurtcircuitare.

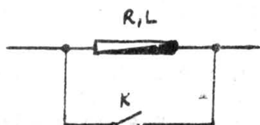


Fig. 5.10.

R.: După scurtcircuitarea bobinei, curentul prin aceasta este menținut de t.e.m. de autoinducție

$$e = - L \frac{di}{dt} \qquad (1)$$

Conform legii lui Ohm

$$Ri = e \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă ecuația diferențială

$$\frac{di}{i} = - \frac{R}{L} dt \qquad (3)$$

Prin integrare

$$\int_I^i \frac{di}{i} = - \frac{R}{L} \int_o^t dt \quad \text{rezultă} \quad i = I e^{-\frac{R}{L} t},$$

Puterea instantanee este

$$p = R i^2 = R I^2 e^{-\frac{2R}{L} t}$$

Deci cantitatea totală de căldură dezvoltată în bobină după scurtcircuitare este

$$W = \int_o^{\infty} R i^2 dt = \frac{L I^2}{2} = 500 \ \mu J$$

Acest rezultat este în concordanță cu principiul conservării energiei, astfel, cantitatea de căldură dezvoltată în bobină după scurtcircuitarea acesteia este egală cu energia inițială a cîmpului magnetic al bobinei $W_m = LI^2/2$.

5.11. Fie un solenoid drept, de rază R, foarte lung și uniform bobinat avînd n spire/m și fiind parcurs de curentul electric alternativ $i = I_m \sin \omega t$. O bobină cu N spire este înfășurată pe acest solenoid (fig.5.11). Să se determine t.e.m. indusă în bobină.

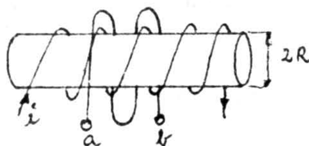


Fig. 5.11.

R.: Fluxul magnetic total ce străbate bobina este

$$\phi = N B S = N \mu_0 i n \pi R^2$$

Conform legii lui Faraday t.e.m. indusă în bobină este

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi \mu_0 n N R^2 \omega I_m \cos\omega t = \pi \mu_0 n N R^2 \omega I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

5.12. O spiră conductoare circulară fixă, de diametru d (fig.5.12) este plasată într-un cîmp magnetic uniform, a cărui inducţie variază în timp după legea: $B = B_m \sin\omega t$. Dacă normala la planul spirei face un unghi constant cu liniile cîmpului magnetic, să se determine:

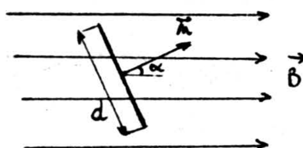


Fig.5.12.

a) sarcina electrică ce străbate secţiunea normală a conductorului din care este confecţionată spira în momentele $t_1 = 0$ şi $t_2 = \frac{T}{4}$.

b) valoarea maximă şi respectiv minimă a puterii medii pe timp de o perioadă T, disipată în spira conductoare prin efect Joule Lenz considerînd $\alpha \in (0, \pi)$. Aplicaţie numerică $d = 10$ cm, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\nu = 50$ Hz, $B_m = 0,8$ T, $R = 2\Omega$.

R.: a) Fluxul magnetic ce străbate spira este

$$\phi = B S \cos\alpha = \frac{\pi d^2}{4} B_m \cos\alpha \sin\omega t$$

Tensiunea electromotoare indusă în spiră este dată de relaţia:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\pi^2 d^2}{2} B_m \nu \cos\alpha \cos\omega t =$$

$$= \frac{\pi^2 d^2 \nu B_m \cos\alpha}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Valoarea instantanee a curentului indus în spiră are expresia

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\pi^2 d^2 \nu B_m \cos\alpha}{2 R} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Sarcina electrică ce străbate secţiunea normală a spi-

rei într-un sfert de perioadă este:

$$Q = \int_0^{T/4} i\ dt = \frac{\pi^2 d^2 \nu B_m \cos\alpha}{2R} \int_0^{T/4} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) dt =$$

$$= -\frac{\pi d^2 B_m \cos\alpha}{4R} = -2,22\ mC$$

b) Puterea medie disipată în spiră se obține astfel:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T R\, i^2 dt = \frac{R}{T}\left(\frac{\pi^2 d^2 \nu B_m \cos\alpha}{2R}\right)^2 \int_0^T \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{2}) dt =$$

$$= \frac{(\pi^2 d^2 \nu B_m \cos\alpha)^2}{8R}$$

$$P_{max} = \frac{(\pi^2 d^2 \nu B_m)^2}{8R} \simeq 1\ W$$ cînd $\alpha = 0$, respectiv $\alpha = \pi$

$P_{min} = 0$ cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5.13. Intr-un cîmp magnetic cu inducția B, verticală, se rotește cu viteza unghiulară ω sub unghiul α și pe un cerc de rază R, o bară metalică. Aflați diferența de potențial de la capetele barei.

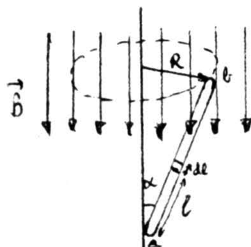


Fig.5.13.

R.: Se consideră pe bară un element infinitezimal dl ce se rotește pe un cerc de rază $l \sin\alpha$ cu viteza liniară $\omega l \sin\alpha$. Acest element infinitezimal de pe bară (aflat la distanța l de capătul barei de pe ax) este echivalent cu un conductor de lungime $dl \cdot \sin\alpha$ ce se deplasează uniform cu viteza $\omega l \sin\alpha$, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic B. Tensiunea electromotoare indusă la capetele acestui element este

$$dU = B \omega l \sin^2\alpha\ dl$$

Diferența de potențial ce apare la capetele barei este:

$$U_{ab} = B\,\omega \sin^2\alpha \int_0^{R/\sin\alpha} l\,dl = \frac{B\omega R^2}{2}$$

Se observă că t.e.m. indusă în bară nu depinde de unghiul de înclinare al barei. Ea este egală cu t.e.m.indusă într-o bară ce se roteşte în plan orizontal pe un cerc de aceeaşi rază şi cu aceeaşi viteză unghiulară (vezi problema 5.4).

5.14. Un miez de fier circular este străbătut de un flux magnetic uniform de forma $\phi = \phi_0 \cos\omega t$. Pe acest miez este îmbrăcat un inel dielectric de rază r şi secţiune S. Determinaţi intensitatea cîmpului din dielectric. Ce curent ar trece prin inel, dacă el a fi conductor şi ar avea rezistivitatea ρ ?

R.: Conform legii lui Faraday, t.e.m. indusă în inel este :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \omega\phi_0 \sin\omega t$$

Tensiunea electromotoare indusă este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de cîmpul electric cînd o singură sarcină pozitivă execută o rotaţie:

$$e = 2\pi r \cdot E$$

Deci intensitatea cîmpului electric E în inelul dielectric este:

$$E = \frac{\omega\phi_0 \sin\omega t}{2\pi r}$$

Dacă inelul ar fi conductor intensitatea curentului indus este:

$$i = \frac{e}{\rho\frac{2\pi r}{S}} = \frac{\omega\phi_0 S}{2\pi r\rho} \sin\omega t$$

5.15. Un conductor liniar, foarte lung, este parcurs de un curent I_0. La distanţele a şi b şi coplanar cu acesta se află alte două conductoare, paralele, conectate între ele printr-un rezistor R. Un conector AB alunecă fără frecare, cu viteza constantă v_1 pe aceste două conductoare (fig.5.15). Rezistenţa firelor se neglijează. Se cer: a) curentul ce trece prin rezistenţa R; b) forţa necesară pentru a menţine în mişcare uniformă conectorul.

R.: a) Se ia conectorul AB un element infinitezimal dr, aflat la distanţa r de conductorul liniar. Inducţia cîmpului magnetic la distanţa r de conductorul liniar parcurs de curentul I_o este

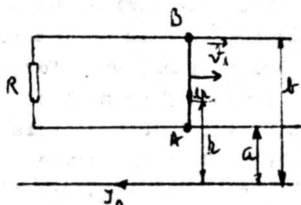


Fig. 5.15.

$$B(r) = \frac{\mu_o I_o}{2\pi r}.$$

Deoarece conectorul AB se deplasează uniform cu viteza v_1, la capetele elementului infinitezimal dr apare o diferenţă de potenţial

$$dU = \frac{\mu_o I_o}{2\pi r} v_1 \, dr$$

Tensiunea electromotoare indusă în conectorul AB este dată de relaţia:

$$e = \frac{\mu_o I_o v_1}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I_o v_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Deci prin rezistorul R va trece curentul:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{\mu_o I_o v_1}{2\pi R} \ln \frac{b}{a}$$

b) Conectorul se mişcă uniform dacă forţa mecanică F este egală şi de sens contrar forţei electromagnetice. Forţa care acţionează asupra elementului de lungime dr este

$$dF = IB(r)dr = \frac{\mu_o^2 I_o^2 v_1}{4\pi^2 R} \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{dr}{r}$$

Deci forţa necesară pentru a menţine în mişcare uniformă conectorul are expresia:

$$F = \frac{\mu_o^2 I_o^2 v_1}{4\pi^2 R} \ln \frac{b}{a}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{v_1}{R} \cdot \left(\frac{\mu_o I_o}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\right)^2$$

5.16. Pe două şine paralele metalice, aflate în plan orizontal la distanţa $\ell = 1$ m una de alta, se poate deplasa fără frecare o bară omogenă conductoare. Lungimea barei este egală cu distanţa dintre şine şi masa sa m = 10 kg. Cele două şine sînt legate la armăturile unui condensator cu capacitatea

$C = 100\ \mu F$. Intreg sistemul se află într-un cîmp magnetic omogen, a cărei inducţie are vectorul orientat vertical şi de modul $B = 10$ T. Să se calculeze sarcina electrică cu care se încarcă condensatorul la $\tau = 1$ s de la începutul acţiunii unei forţe exterioare, aplicată în centrul barei, orientată paralel cu şinele şi egală în modul cu $F = 0{,}04$ N. Iniţial bara se află în repaus. Rezistenţa electrică a şinelor este neglijabilă.

R.: După timpul dt sarcina de pe armăturile condensatorului este

$$dQ = C\,dU = C\,B\,\ell\,dv$$

Deci curentul indus, care încarcă condensatorul este dat de relaţia:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\,B\,\ell\,\frac{dv}{dt}$$

Forţa electromagnetică ce acţionează asupra barei şi care se opune mişcării ei este:

$$F_{em} = B\,I\,\ell = B^2\ell^2 C\,\frac{dv}{dt}$$

Conform legii a doua a dinamicii avem:

$$m\,\frac{dv}{dt} = F - F_{em} = F - B^2\ell^2 C\,\frac{dv}{dt}$$

Sarcina cu care se încarcă condensatorul după timpul τ de la începutul acţiunii forţei exterioare este:

$$Q = C\,B\,\ell\int_0^{\tau}\frac{dv}{dt}\cdot dt = \frac{CB\ell F}{m+B^2\ell^2 C}\int_0^{\tau}dt = \frac{CB\ell F\tau}{m+B^2\ell^2 C} = 4\,\mu C$$

5.17. Un cadru pătrat, conductor cu latura a, rezistenţa electrică R şi masa m cade liber într-un cîmp magnetic. Vectorul inducţiei magnetice B este perpendicular pe planul cadrului, iar modulul său variază cu înălţimea faţă de suprafaţa pămîntului după legea $B(z) = B_0 + kz$, unde B_0 şi K sînt constante. Să se determine viteza limită de cădere a cadrului.

R.: Fie poziţia cadrului, în care latura inferioară a cadrului se află la înălţimea z de suprafaţa pămîntului (fig. 5.17.a) şi fie v viteza pe care o are cadrul în cădere la această altitudine. Tensiunea electromotoare indusă în latura superioară a cadrului este:

$$e_1 = \left[B_0 + k(z+a)\right] a\,v \qquad (1)$$

iar cea indusă în latura inferioară este:

$$e_2 = (B_0+kz)\ a\ v \qquad (2)$$

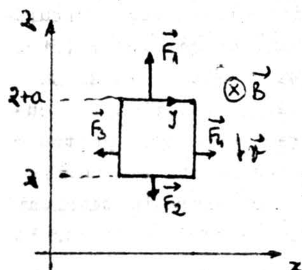


Fig.5.17.a.

Schema electrică echivalentă a sistemului la această înălţime este redată în figura 5.17.b.

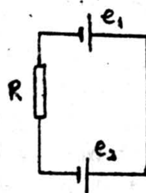


Fig.5.17.b.

Curentul indus care circulă prin cadru este:

$$I = \frac{e_1-e_2}{R} = \frac{B_0 a^2 v}{R} \qquad (3)$$

Forţele electromagnetice care acţionează asupra laturilor superioară, respectiv inferioară au sensurile indicate în figura 5.17.a (conform regulii mîinii stîngi) şi au expresiile:

$$F_1 = \left[B_0 + k(z+a)\right] \frac{B_0 a^3 v}{R} \qquad (4)$$

$$F_2 = (B_0 + kz) \frac{B_0 a^3 v}{R} \qquad (5)$$

La orice înălţime cuprinsă între z şi z+a forţele elementare care acţionează asupra elementelor de lungime dz, de pe laturile laterale sînt egale şi de sens contrar, astfel încît suma rezultatelor lor este nulă:

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Viteza limită se obţine cînd este îndeplinită condiţia:

$$F_1 = F_2 + mg \qquad (6)$$

Introducînd relaţiile (4) şi (5) în (6) obţinem

$$v_l = \frac{mgR}{k^2 a^4}$$

5.18. O bară cu masa m se poate roti în jurul axei O

alunecînd, fără frecare pe un conductor perfect circular de rază a, a cărui suprafaţă se află în plan vertical. Bara intersectează liniile unui cîmp magnetic de inducţie B perpendiculare pe suprafaţa inelului conductor (fig. 5.18.a). Rezistenţa firelor este R. Să se determine: a) legea de variaţie a curentului I care trece prin bară pentru ca aceasta să se rotească cu viteza unghiulară constantă ω ; b) expresia tensiunii electromotoare E ce asigură acest curent.

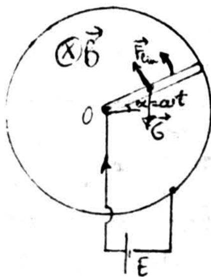


Fig.5.18.a.

R.: a) Bara se roteşte cu viteza unghiulară constantă cînd este indeplinită condiţia

$$F_{em} = G \cos\alpha \qquad (1)$$

Deci: $BIa = mg \cos\omega t$

Rezultă că legea de variaţie a curentului I este următoarea:

$$I = \frac{mg}{B\,a} \cos\omega t \qquad (2)$$

b) T.e.m. indusă în bară, conform problemei 5.4, este:

$$e = \frac{B\omega a^2}{2} \qquad (3)$$

Schema electrică echivalentă a sistemului este redată în figura 5.18.b.

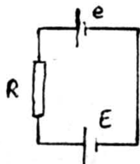


Fig.5.18.b.

Deci curentul care circulă prin bară este

$$I = \frac{E-e}{R} \qquad (4)$$

Inlocuind relaţiile (2) şi (3) în (4) obţinem

$$E = \frac{B\omega a^2}{2} + \frac{mgR}{B\,a} \cos\omega t$$

5.19. Conturul dreptunghiular ABCD se deplasează în cîmpul magnetic produs de curentul I care străbate conductorul infinit lung OO' pe o direcţie perpendiculară pe conductor (fig.5.19). Să se determine mărimea şi direcţia curentului indus în contur dacă deplasarea conturului se face cu viteza v.

Rezistența conturului este R.

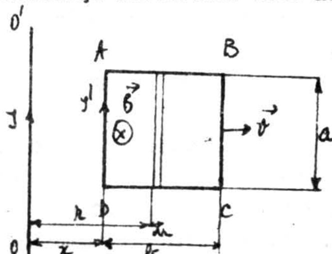


Fig.5.19.

R.: Considerăm un element de lățime dr situat la distanța r de conductor. Fluxul magnetic ce străbate acest element este:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi r} dr$$

Deci fluxul magnetic prin cadru va fi:

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_x^{x+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{x+b}{b}$$

Conform legii lui Faraday, t.e.m. indusă în cadru este:

$$|e| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 Iabv}{2\pi x(x+b)}$$

Deci curentul indus în contur este:

$$I' = \frac{|e|}{R} = \frac{\mu_0 Iabv}{2\pi x(x+b)R}$$

Sensul său se determină cu regula mîinii drepte.

5.20. O sursă de tensiune E = 10 V este conectată la două conductoare paralele cu rezistența nulă plasate la distanla $\ell = 0,1$ m unul de altul. Pe conductoare este așezată o bară cu masa m = 0,1 kg și rezistența R = 2 Ω care se poate deplasa fără frecare. Un cîmp magnetic cu inducția B = 1 T este perpendicular pe planul conductoarelor (fig.5.20). Să se determine expresia vitezei barei ca funcție de timp considerînd că mișcarea începe cu t = 0.

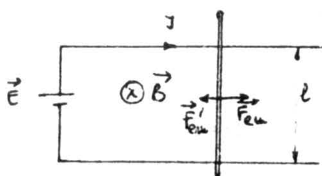


Fig.5.20.

R.: Se scrie legea lui Newton:

$$m\frac{dv}{dt} = B\frac{E}{R}\ell - B\frac{B\ell v}{R}\ell$$

Se integrează această ecuație diferențială;

$$\int_0^v \frac{dv}{E-B\ell v} = \frac{B\ell}{mR}\int_0^t dt$$

Se obţine următoarea expresie pentru viteza barei:

$$v = \frac{E}{B\ell}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2 t}{mR}}\right) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right) \qquad \left(\frac{m}{s}\right)$$

5.21. O bară perfect conductoare de lungime $\ell = 10$ cm şi masă $m = 0,01$ g alunecă fără frecare de-a lungul a două bare perfect conductoare plasate vertical şi legate prin intermediul unui condensator de capacitate $C = 100$ μF ca în figură. Perpendicular pe planul barelor acţionează un cîmp magnetic uniform de inducţie $B = 1$ T. Se cere să se stabilească legea de variaţie în timp a vitezei barei mobile, dacă la momentul $t = 0$ este lăsată să cadă de-a lungul barelor verticale.

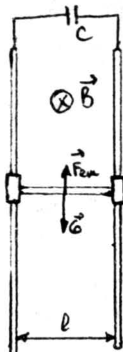


Fig.5.21.

R.: Curentul indus în circuit este un curent de încărcare pentru condensator:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt} = CB\ell\frac{dv}{dt}$$

Forţa exercitată de cîmpul magnetic, asupra barei este

$$F_{em} = B\,i\,\ell = B^2\ell^2 C\frac{dv}{dt}$$

Scriem legea a doua a dinamicii pentru bară

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g - B^2\ell^2 C\frac{dv}{dt}$$

Din integrarea acestei ecuaţii diferenţiale rezultă

$$v = \frac{mgt}{m+C\ell^2B^2} = 8,9\ t\ \text{(m/s)}$$

5.22. Se consideră un conductor rectiliniu, foarte lung, parcurs de un curent I şi un cadru MNPQ (figura 5.22.a) a cărui laturi MN = PQ = C sînt paralele cu conductorul. Timp de 0,1 s se roteşte cadrul în jurul punctului N, în propriul plan cu 90°

în sens antiorar. Să se determine cantitatea de electricitate ce străbate cadrul în timpul acestei operaţii. Aplicaţia numerică: I = 20 A, a = 30 cm, b = 60 cm, c = 10 cm, rezistenţa cadrului R = 0,1 Ω .

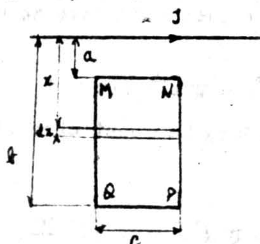


Fig.5.22.a.

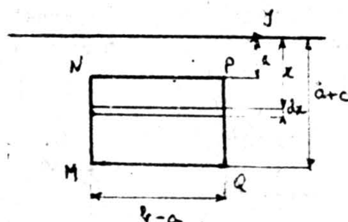


Fig.5.22.b.

R.: Fluxul magnetic ce străbate cadrul în primul caz (fig.5.22.a) este:

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 I c}{2\pi}\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Fluxul magnetic ce străbate cadrul după rotirea sa (fig.5.22.b) este:

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 I(b-a)}{2\pi}\int_a^{a+c} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I(b-a)}{2\pi}\ln\frac{a+c}{a}$$

Cantitatea de electricitate indusă în cadru devine:

$$Q = \int i\,dt = -\frac{1}{R}\int d\phi = \frac{\phi_1-\phi_2}{R} = 0,485\ \mu C$$

5.23. Un cablu din fier, de secţiune circulară, de rază a = 5 cm este plasat într-un cîmp magnetic uniform ale cărui linii de cîmp sînt paralele cu axul cablului. Inducţia magnetică are o variaţie sinusoidală cu frecvenţa de 50 Hz şi cu amplitudinea B_m = 1,6 T. Se cere puterea disipată de către curenţii Foucoult pe centimetru cub de cablu în următoarele cazuri.

a) cablu masiv,

b) cablu este alcătuit din mai mulţi conductori de fier de diametru d' = 0,5 cm fiecare, izolaţi unul de altul. Numărul de conductori care formează cablul este ales astfel încît secţiunea totală utilă este egală cu cea a cablului masiv. Se dă rezistivitatea fierului ρ = 11 μΩ·cm.

R.: a) Intr-o secţiune transversală în cablu, considerăm un circuit circular de rază r, lăţime dr, grosime h (figura 5.23) şi centrat pe axul cablului.

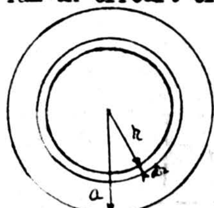


Fig.5.23.

Acest circuit este traversat de un flux magnetic:

$$\phi = \pi r^2 B = \pi r^2 B_m \sin \omega t$$

Tensiunea indusă în acest circuit are expresia:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 B_m \omega \cos \omega t = U\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

unde U este valoarea efectivă a tensiunii induse.

Puterea disipată de către curenţii Foucoult în acest circuit este dată de expresia:

$$dP = U^2 \cdot \frac{h\,dr}{\rho \cdot 2\pi r} = \frac{B_m^2 \omega^2 \pi h}{4\rho} r^3 dr$$

Puterea disipată în cablu se obţine însumînd astfel de puteri elementare:

$$P = \frac{B_m^2 \omega^2 \pi h}{4\rho}\int_0^a r^3 dr = \frac{B_m^2 \omega^2 \pi h a^4}{16\rho}$$

Ţinînd cont că $V = \pi h a^2$ este volumul cilindrului considerat putem scrie:

$$\frac{P}{V} = \frac{B_m^2 \omega^2 a^2}{16\rho} = 360 \frac{W}{cm^3}$$

b) Puterea disipată într-un conductor axial de rază $a' = d'/2$ este

$$P' = B_m^2 \omega^2 \pi h \frac{a'^4}{16\rho}$$

Deoarece cei n conductori din cablu sînt identici, puterea totală disipată prin cablu va fi

$$P_1 = nP' = n B_m^2 \omega^2 \pi h \frac{a'^4}{16\rho}$$

Dar produsul $\pi n h a'^2$ este egal cu volumul cablului masiv V. Deci putem scrie:

$$\frac{P_1}{V} = \frac{B_m^2 \omega^2 a'^2}{16 \rho} = P\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 0{,}9 \ W/cm^3$$

Din aceste rezultate se observă că pierderile prin curenţi turbionari în cabluri pot fi micşorate prin folosirea de cabluri formate din mai mulţi conductori.

5.24. Un solenoid avînd secţiunea $S = 10 \ cm^2$ şi $N = 100$ spire este plasat într-un cîmp magnetic omogen de inducţie $B = 0{,}1$ T, cu axul paralel cu liniile de cîmp. La bornele solenoidului este conectat un galvanometru balistic avînd sensibilitatea $K = 2 \cdot 10^6$ div/C, rezistenţa totală a circuitului fiind $R = 100 \Omega$. Se cere indicaţia galvanometrului balistic dacă se roteşte brusc solenoidul cu $\alpha = 60^{\circ}$ faţă de direcţia iniţială.

R.: Fluxul total al solenoidului în starea iniţială este

$$\phi_i = N B S$$

Fluxul total al solenoidului în starea finală este

$$\phi_f = N B S \cos \alpha$$

Sarcina electrică totală ce parcurge înfăşurarea galvanometrului are expresia

$$Q = \int i \, dt = \int \frac{e}{R} dt = -\frac{1}{R} \int d\phi = \frac{\phi_i - \phi_f}{R} = \frac{NBS(1-\cos\alpha)}{R}$$

Indicaţia θ a galvanometrului balistic este proporţională cu sarcina totală care îi parcurge înfăşurarea.

$$\theta = KQ = \frac{KNBS(1-\cos\alpha)}{R} = 100 \ div$$

5.25. Unul din procedeele de măsurare a inductanţelor mutuale este metoda Felici, care constă în compararea inductanţei mutuale de măsurat M_x, cu o inductanţă mutuală etalon, variabilă (variometru) M_e, avînd un domeniu de variaţie între 0 şi 0,191 H. In schema de montaj (fig.5.25) înfăşurările primare (A_1B_1 şi C_1D_1) sînt legate în serie şi conectate la un vibrator alimentat cu o baterie de acumulatori, iar înfăşurările

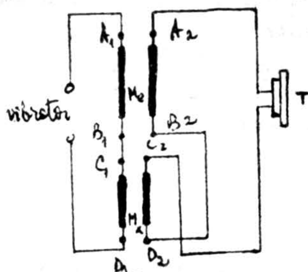


Fig. 5.25.

secundare (A_2B_2 şi C_2D_2) sînt conectate în opoziţie. Circuitul mai cuprinde şi o cască telefonică T, folosită ca detector de nul. Ştiind că în cască s-a obţinut un sunet minim pentru $M_e = 0,16$ H, să se determine inductanţa mutuală M_x.

R.: Variaţia curentului i_1 din primar induce în bobina A_2B_2 o t.e.m.:

$$e_1 = - M_e \frac{di_1}{dt}$$

iar în bobina C_2D_2 o t.e.m.

$$e_2 = - M_x \frac{di_1}{dt}$$

Cele două înfăşurări ale bobinelor A_2B_2 şi C_2D_2 sînt legate în opoziţie, deci t.e.m. din circuitul secundar este

$$e = e_1 - e_2 = (M_x - M_e) \frac{di_1}{dt}$$

In casca telefonică T sunetul este minim cînd curentul prin circuitul secundar este nul (e = 0). Rezultă că:

$$M_x = M_e = 0,16 \text{ H}$$

5.26. Să se calculeze coeficientul de inducţie mutuală (inductanţa mutuală) între un fir conductor rectiliniu, infinit şi un cadru dreptunghiular a cărui dimensiune şi poziţie este dată în fig.5.26.

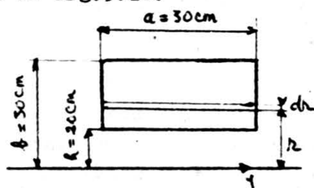


Fig.5.26.

R.: Se consideră un element infinitezimal de arie, dS = a dr, situat la distanţa r de conductor.

Fluxul elementar ce străbate această suprafaţă este:

$$d\phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

Fluxul total ce străbate cadrul este:

$$\phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_h^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b}{h}$$

Coeficientul de inducţie mutuală se determină astfel:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b}{h} = 0,0243 \quad \mu H$$

5.27. Să se calculeze coeficientul de autoinducţie (inductanţa) unui toroid avînd numărul total de spire egal cu N ; prin care circulă un curent de intensitate I (fig.5.27).

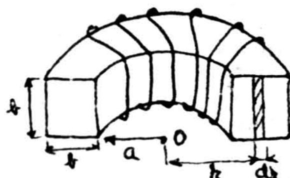


Fig.5.27.

R.: In interiorul toroidului, la distanţa r de centrul lui, cîmpul magnetic are valoarea

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

La distanţa r de centrul toroidului considerăm un element de grosime dr şi înălţime b. Fluxul elementar prin elementul de arie dS = b dr, ce străbate o singură spiră este:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

Fluxul total prin toroid va fi:

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I b}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

Deci inductanţa toroidului devine

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

5.28. Un cablu coaxial este constituit dintr-un conductor cilindric de rază r_1 înconjurat de alt conductor cilindric coaxial de rază r_2. Intre cei doi conductori există un strat izolator. Prin conductori circulă curenţi de intensitate I şi opuşi ca sens. Să se calculeze coeficientul de autoinducţie, considerînd că în conductorul interior curentul se scurge prin suprafaţa conductorului.

R.: In spaţiul dintre cei doi conductori cilindrici coaxiali, cîmpul magnetic are valoarea:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Considerăm un plan care trece prin axa cablului de lun-

gime l. Fluxul magnetic printr-un element de arie $dS = l \cdot dr$, din acest plan este:

$$d\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

Fluxul magnetic ce traversează spaţiul dintre cei doi conductori va fi:

$$\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Deci inductanţa cablului coaxial va fi:

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

5.29. Să se calculeze coeficientul de inducţie mutuală (inductanţa mutuală) a doi conductori rectilinii paraleli de lungime 2a separaţi la distanţa d (fig. 5.29).

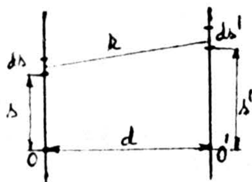


Fig. 5.29.

R.: Folosim formula lui Neumann

$$M = \iint \frac{ds\, ds' \cos\theta}{r}$$

unde r este distanţa între elementele ds şi ds', iar θ este unghiul dintre cele două elemente. După cum se observă din figură $\theta = 0$, iar $r = (d^2 + (s-s')^2)^{1/2}$.

Deci inductanţa mutuală a celor doi conductori se calculează cu ajutorul următoarei integrale:

$$M = \int_{-a}^{a} ds \int_{-a}^{a} \frac{ds'}{\sqrt{(s-s')^2 + d^2}}$$

Se face schimbarea de variabilă

$$s - s' = x \quad , \quad ds' = -dx$$

Integrala după s' devine:

$$\int_{-a}^{a} \frac{ds'}{\sqrt{(s-s')^2 + d^2}} = -\int_{s+a}^{s-a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \ln\left[s+a+\sqrt{(s+a)^2+d^2}\right] - \ln\left[s-a+\sqrt{(s-a)^2+d^2}\right]$$

Deci inductanţa mutuală M se determină cu ajutorul relaţiei:

$$M = \int_{-a}^{a} \ln\left[s+a+\sqrt{(s+a)^2+d^2}\right]ds - \int_{-a}^{a} \ln\left[s-a+\sqrt{(s-a)^2+d^2}\right]ds$$

In prima integrală facem schimbarea de variabilă

$$s + a = y \quad , \qquad ds = dy$$

Deci:

$$I_1 = \int_{-a}^{a} \ln\left[s+a+\sqrt{(s+a)^2+d^2}\right]ds = \int_{0}^{2a} \ln(y+\sqrt{y^2+d^2})dy$$

Apoi integrăm prin părţi

$$f = \ln(y+\sqrt{y^2+d^2}) \ , \quad df = \frac{dy}{\sqrt{y^2+d^2}} \ , \qquad g = y$$

Integrala I_1 devine:

$$I_1 = y\ln(y+\sqrt{y^2+d^2})\Big|_0^{2a} - \int_0^{2a}\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+d^2}} =$$

$$= 2a\ln(2a+\sqrt{4a^2+d^2}) - \sqrt{y^2+d^2}\Big|_0^{2a} =$$

$$= 2a\ln(2a+\sqrt{4a^2+d^2}) - \sqrt{4a^2+d^2} + d$$

In a doua integrală facem schimbarea de variabilă:

$$s - a = z \ , \quad ds = dz.$$

Deci $$I_2 = \int_{-a}^{a} \ln\left[s-a+\sqrt{(s-a)^2+d^2}\right]ds = \int_{-2a}^{0} \ln(z+\sqrt{z^2+d^2})dz =$$

$$= z\ln(z+\sqrt{z^2+d^2})\Big|_{-2a}^{0} - \sqrt{z^2+d^2}\Big|_{-2a}^{0} =$$

$$= 2a\ln(-2a+\sqrt{4a^2+d^2}) - d + \sqrt{4a^2+d^2}$$

Obţinem astfel pentru coeficientul de inducţie mutuală expresia:

$$M = 2a\ln\left(\frac{\sqrt{4a^2+d^2}+2a}{\sqrt{4a^2+d^2}-2a}\right) - 2\sqrt{4a^2+d^2} + 2d$$

5.30. Pentru degazarea părţilor metalice ale tuburilor

cu vid, acestea sînt încălzite cu ajutorul curenţilor Foucault, în cîmpul unei bobine de înaltă frecvenţă cu $N = 15$ spire de sîrmă groasă de cupru. Lungimea bobinei este $\ell = 10$ cm. Anodul unui tub de descărcare cu catod cald este un disc de aluminiu ($\rho = 3\,\mu\Omega\cdot$ cm) cu diametrul $D = 4$ cm şi grosimea $a = 3$ mm. Tubul este aşezat în interiorul bobinei încît anodul este în centrul bobinei, normal pe axa ei. Prin bobină circulă un curent de înaltă frecvenţă, $\nu = 10$ [illegible] Hz, de intensitate $I = 50$ A. Să se calculeze cantitatea de căldură care se dezvoltă pe secundă în disc. Cîmpul magnetic al curenţilor Foucault se poate neglija.

R.: Se consideră, în interiorul discului, un circuit de forma unui strat cilindric de grosime dr, raza interioară r, înălţimea a (figura 5.30)

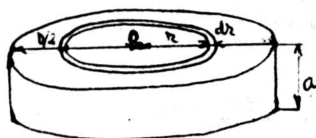


Fig.5.30.

Cîmpul magnetic ce străbate discul este:

$$B = \frac{\mu_0 N I \sin\omega t}{\ell}$$

Deci fluxul magnetic prin disc este dat de relaţia:

$$\phi = \frac{1}{\ell}\,\mu_0 N I \pi r^2 \sin\omega t$$

Conductanţa circuitului considerat este:

$$dG = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{a\,dr}{2\pi r}$$

Deoarece t.e.m. indusă în circuit este:

$$|e| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi^2\mu_0 N I \nu r^2}{\ell}\cos\omega t = E_m\cos\omega t$$

puterea disipată în circuit de către curenţii turbionari are expresia:

$$dP = \frac{E_m^2}{2}\,dG = \frac{\pi^3\mu_0^2 N^2 I^2 \nu^2 a}{\rho\,\ell^2}\,r^3 dr$$

Deci cantitatea de căldură care se dezvoltă pe secundă în disc este:

$$P = \frac{\pi^3 \mu_o^2 N^2 I^2 \gamma^2 a}{2} \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{\pi^3 \mu_o^2 N^2 I^2 \gamma^2 a D^4}{4^3 \rho l^2}$$

5.31. Două bobine circulare plate, constituite din $N_1 = 100$ spire şi respectiv, $N_2 = 20$ spire, de rază medie $R_1 = 40$ cm şi $R_2 = 1$ cm, sînt parcurse în acelaşi sens de curenţii de intensitate I_1 şi I_2. Bobinele sînt coaxiale, distanţa dintre centrele lor fiind d = 30 cm. Să se determine:

a) coeficientul de inducţie mutuală,

b) pentru ce valoare a lui d, forţa de interacţiune dintre bobine va avea valoarea maximă.

R.: a) Deoarece suprafaţa bobinei 2 este mult mai mică decît suprafaţa bobinei 1 ($R_2 \ll R_1$), se poate considera că, cîmpul magnetic produs de curentul I_1 este practic constant pe toată suprafaţa bobinei 2, avînd valoarea din centrul ei:

$$B_1 = \frac{\mu_o N_1 I_1 R_1^2}{2(R_1^2 + d^2)^{3/2}}$$

Deci fluxul magnetic ce traversează bobina 2 este:

$$\phi = N_2 B_1 \cdot \pi R_2^2 = \frac{\pi \mu_o N_1 N_2 I_1 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + d^2)^{3/2}}$$

iar coeficientul de inducţie mutuală

$$M = \frac{\phi}{I_1} = \frac{\pi \mu_o N_1 N_2 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{K}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}}$$

b) Energia magnetică a celor două bobine cuplate are expresia

$$W_m = \frac{L_1 I_1^2}{2} + M I_1 I_2 + \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{K I_1 I_2}{(R_1^2 + x^2)^{3/2}}$$

Forţa de interacţiune dintre cele două bobine este

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x} = - \frac{3 K I_1 I_2 x}{(R_1^2 + x^2)^{5/2}}$$

Semnul minus arată că forţa de interacţiune este o forţă atractivă.

Pentru a determina valoarea distanţei dintre bobine x, pentru care această forţă este maximă punem condiţia:

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

Rezultă ecuaţia algebrică în x :

$$\frac{1}{(R_1^2+x^2)^{5/2}} - \frac{5\,x^2}{(R_1^2+x^2)^{7/2}} = 0$$

ce are soluţia

$$x = \frac{R_1}{2} = 20\ \text{cm}$$

5.32. Pe o bobină de lungime l = 50 cm, diametru D = 1 cm, uniform bobinată cu N_1 = 1000 spire se realizează în regiunea ei centrală, coaxial, un al doilea bobinaj de N_2 = = 1000 spire. Bobina secundară este conectată la un galvanometru balistic (fig.5.32). Rezistenţa totală a circuitului secundar este R = 20 Ω . Ambele bobine sînt plasate în aer. In circuitul principal circulă un curent I = 2A.

Care este valoarea sarcinii electrice induse în circuitul secundar, la închiderea şi deschiderea circuitului primar.

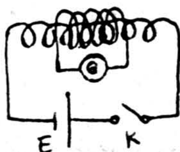


Fig.5.32.

R.: Fluxul magnetic ce traversează bobina circuitului secundar este:

$$\phi = N_2 \cdot \frac{\mu_0 N_1 I}{l} \cdot \pi \frac{D^2}{4}$$

Sarcina electrică indusă în circuitul secundar se determină astfel:

$$Q = \int_0^{\tau} i\ dt = \frac{1}{R}\int_0^{\tau} |e|\ dt = \frac{1}{R}\int_0^{\tau} \frac{d\phi}{dt}\,dt = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{\phi}{R} =$$

$$= \frac{\pi N_1 N_2 \mu_0 I\ D^2}{4\,R\,l} = 1{,}97\ \mu C$$

5.33. Un dispozitiv pentru măsurarea cîmpurilor magnetice este alcătuit dintr-o bobină circulară, plană, de diametru D = 15 mm, cu N = 50 spire, conectată la un galvanometru balistic cu constanta K = 10^{-8} C/div. Datorită unui resort, bobina

se poate roti cu 180°. Care este inducţia magnetică dintre polii unui electromagnet, dacă prin rotirea bobinei de explorare cu 180°, spotul luminos indică pe scala galvanometrului $\theta = 100$ div?

R.: Indicaţia galvanometrului balistic este proporţională cu sarcina electrică indusă în circuitul bobină - galvanometru

$$Q = K\,\theta \qquad (1)$$

Sarcina electrică indusă în circuitul bobină - galvanometru este

$$Q = \int_0^{\tau} i\,dt = \frac{1}{R}\int_0^{\tau} |e|\,dt = \frac{\Phi}{R} = N\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot B\cdot\frac{1}{R} \qquad (2)$$

Din egalarea relaţiilor (1) şi (2) rezultă:

$$B = \frac{4\,R\,K\,\theta}{\pi\,N\,D^2} = 17{,}7 \text{ mT}$$

5.34. Printr-o bobină rectilinie, lungă cu $n = 20$ spire/cm trece un curent continuu de intensitate $I = 1$ A. In interiorul bobinei şi la mijlocul ei se află un cilindru din material izolant de densitate $\rho_m = 1$ g/cm^3, diametru $d = 10$ cm şi înălţime $h = 10$ cm. Cilindrul se poate roti fără frecare în jurul unui ax perpendicular pe axa bobinei şi paralel cu generatoarea cilindrului. Pe acest cilindru se fixează o singură spiră de cupru de 1 mm^2 secţiune al cărei plan trece prin axa cilindrului din material izolant (se neglijează greutatea spirei). Dacă iniţial cilindrul din material izolant face $\nu_0 = 50$ rot/s să se găsească după cît timp frecvenţa de rotaţie este redusă în raportul $\frac{1}{e}$. Se mai ştie că un rezistor de lungime $\ell_1 = 60$ m, confecţionat din sîrma din care este făcută spira are rezistenţa $R_1 = 1\ \Omega$.

R.: Fluxul magnetic ce traversează spira este:

$$\Phi = B\,S\cos\omega t = \mu_0 n I\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot\cos\omega t$$

Deci t.e.m. indusă în spiră are expresia:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi d^2 \mu_0 n\,\omega I}{4}\sin\omega t = E_m \sin\omega t$$

Pentru a determina dependenţa în raport cu timpul, a frecvenţei de rotaţie a cilindrului folosim teorema conservării energiei:

$$dW = - dE_c \quad \text{unde} \quad dW = \frac{E_m^2}{2R} dt \quad \text{iar}$$

$$dE_c = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega \, d\omega$$

J fiind momentul de inerţie al cilindrului

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{1}{2} \rho_m \frac{\pi d^2}{4} h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi \rho_m d^2 h^3}{32}$$

In urma înlocuirilor rezultă ecuaţia diferenţială :

$$\frac{d\omega}{\omega} = - \frac{1}{2\,RJ} \left(\frac{\pi d^2 \mu_o n I}{4}\right)^2 dt \quad \text{deci} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -K\, dt$$

unde

$$K = \frac{1}{2\,RJ} \left(\frac{\pi d^2 \mu_o n I}{4}\right)^2$$

Ea are soluţia :

$$\omega = \omega_o e^{-Kt}$$

Frecvenţa se reduce de e ori $\left(\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{1}{e}\right)$ după timpul

$$t = \frac{1}{K} = \frac{32\,R\,J}{(\pi d^2 \mu_o n I)^2} \quad \text{dar} \quad \frac{R}{R_1} = \frac{\pi d}{\ell_1}$$

deci

$$t = \frac{\rho_m R_1 h^3}{d\ell_1 (\mu_o n I)^2} \simeq 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ s.}$$

6. FENOMENE TRANZITORII IN CIRCUITELE ELECTRICE

6.1. Să se găsească expresia ce dă variaţia sarcinii pe un condensator într-un circuit RC, la închiderea şi deschiderea circuitului.

R.: La închiderea circuitului, condensatorul se încarcă, curentul de încărcare avînd expresia:

$$I = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Variaţia sarcinii condensatorului se determină astfel:

$$Q = \int_0^t I\,dt = -\frac{E}{R} \cdot RC \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\Bigg|_0^t = EC\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

La deschiderea circuitului, condensatorul se descarcă. Din legea a doua a lui Kirchhoff rezultă:

$$U_c - U_R = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{Q}{c} - IR = 0$$

Diferenţiind ultima relaţie:

$$\frac{1}{c}\,dQ - R\,dI = 0$$

şi ţinînd cont că $dQ = -I\,dt$ obţinem ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\,dt \quad \text{deci} \quad I = I_o \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Variaţia sarcinii se determină astfel: $Q = CU_c = C\,I\,R = C\,R\,I_o \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$. Deci sarcina condensatorului la deschiderea circuitului scade exponenţial în timp.

6.2. Considerăm un circuit constituit dintr-un condensator C şi un rezistor R. Presupunem că iniţial condensatorul nu este încărcat, iar la timpul $t = 0$, între două puncte ale circuitului se aplică o diferenţă de potenţial U. a) Să se stabilească legea de evoluţie a diferenţei de potenţial u(t) la bornele condensatorului. b) După cît timp tensiunea reprezintă o miime din valoarea sa maximă, c) Tensiunea U este înlăturată la momentul $t = 0$. Să se dea legea de evoluţie ulterioară a tensiunii u(t). După cît timp tensiunea de la bornele condensatorului reprezintă o miime din valoarea la $t = 0$? Aplicaţie numerică $R = 7000\,\Omega$, $C = 4\,\mu F$.

R.: a) Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$u(t) + R\,i = U$$

dar $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$ deci $u + RC\frac{du}{dt} = U$ sau $\frac{du}{U-u} = \frac{dt}{RC}$

Notăm $RC = \tau$. Prin integrarea ecuaţiei diferenţiale şi ţinînd cont că $u(0) = 0$ obţinem:

$$u(t) = U\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]$$

b) Punem condiţia $\frac{U-u(t)}{U} = 10^{-3}$ sau $\exp(-\frac{t}{\tau}) = 10^{-3}$

Deci $t = 3\tau \ln 10 = 0{,}19$ s

c) La momentul t: $u(t) = -R\,i(t)$ sau $u = -RC\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}$.

Integrînd ecuaţia diferenţială şi ţinînd cont că $u(0) = U\left[1 - \exp(-\frac{\theta}{\tau})\right]$, obţinem

$$u = U\left[1 - \exp(-\theta/\tau)\right]\exp(-t/\tau)$$

Punînd condiţia $\frac{u}{U\left[1-\exp(-\theta/\tau)\right]} = 10^{-3}$ obţinem

$e^{-t/\tau} = 10^{-3}$, deci $t = 3\tau \ln 10 = 0{,}19$ s.

6.3. Un condensator încărcat, de capacitate C, este legat cu un condensator C' (iniţial neîncărcat) prin intermediul unei rezistenţe R.

a) Ştiind că după timpul θ sarcina condensatorului devine 1/n din valoarea sa iniţială, să se calculeze rezistenţa R în funcţie de C, C', θ şi n.

b) Cunoscînd sarcina iniţială Q_0 a condensatorului C, să se calculeze energia disipată sub formă de căldură pe rezistenţa R: - în timpul θ; - cînd echilibrul electrostatic este atins.

R.: a) Fie q sarcina condensatorului C, iar $q' = Q_0 - q$ sarcina condensatorului C' la momentul t. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$R\,i + \frac{q'}{C'} - \frac{q}{C} = 0$$

Dar $i = \frac{dq'}{dt} = -\frac{dq}{dt}$. Rezultă ecuaţia diferenţială în q:

$$R\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)q = \frac{Q_o}{C'}$$

Soluţia ecuaţiei omogene este $q = A\exp\left(-\frac{C+C'}{RCC'}t\right)$, iar soluţia particulară este $q = \frac{Q_oC}{C+C'}$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale în q este $q = A\exp\left(-\frac{C+C'}{RCC'}t\right) + \frac{Q_oC}{C+C'}$.

Constanta de integrare A se determină din condiţia iniţială $q(0) = Q_o$, deci $A = \frac{Q_oC'}{C+C'}$. Rezultă pentru q expresia

$$q(t) = \frac{Q_o}{C+C'}\left[C'\exp\left(-\frac{C+C'}{RCC'}t\right) + C\right]$$

Dar $q(\theta) = \frac{Q_o}{n}$ deci $R = \dfrac{(C+C')\theta}{CC'\ln\left(\frac{nC'}{C+C'-nC}\right)}$

b) Energia disipată sub formă de căldură pe rezistorul R, în timpul θ este: $W = \int_0^\theta R\,i^2dt$. Dar $i = -\frac{dq}{dt} =$

$$= \frac{Q_o}{RC}\exp\left(-\frac{C+C'}{RCC'}t\right), \quad \text{deci}$$

$$W = \frac{Q_o^2}{RC^2}\int_0^\theta \exp\left[-\frac{2(C+C')}{RCC'}t\right]dt = -\frac{Q_o^2C'}{2C(C+C')}\exp\left[-\frac{2(C+C')t}{RCC'}\right]\Bigg|_0^\theta =$$

$$= \frac{Q_o^2C'}{2C(C+C')}\left[1 - \exp\left(-\frac{2(C+C')\theta}{RCC'}\right)\right] = \frac{Q_o^2C'}{2C(C+C')}\left[1 - \frac{(C+C'-nC)^2}{n^2C'^2}\right] =$$

$$= \frac{Q_o^2}{2n^2}\left[\frac{n^2-1}{C} + \frac{(n-1)^2}{C'}\right]$$

Energia disipată sub formă de căldură pe rezistorul R după atingerea echilibrului electrostatic este:

$$W' = \int_0^\infty R\,i^2dt = \frac{Q_o^2}{RC^2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{2(C+C')t}{RCC'}\right]dt = \frac{Q_o^2C'}{2C(C+C')}$$

6.4. Un condensator de 0,1 μF şi o rezistenţă de 1000 Ω se leagă în serie la o sursă de 100 V. Care este curentul în mo-

mentul cînd pe plăcile condensatorului se găsesc 5 μC? Care este curentul final?

R.: Fie i curentul ce trece prin circuit, iar q sarcina de pe armăturile condensatorului la momentul t. Din legea a doua a lui Kirchhoff: $R\,i + \frac{q}{C} = E$ şi $i = \frac{dq}{dt}$ rezultă ecuaţia diferenţială în q:

$$R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

a cărei soluţie generală este:

$$q(t) = A\,\exp(-\frac{t}{RC}) + EC$$

Constanta de integrare A se determină din condiţia iniţială $q(0) = 0$.

Deci:

$$q(t) = E\,C\left[1 - \exp(-\frac{t}{RC})\right], \text{ iar } i = \frac{E}{R}\exp(-\frac{t}{RC})$$

Eliminînd $\exp(-\frac{t}{RC})$ între cele două relaţii obţinem:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{q}{RC}$$

Ţinînd cont de valorile numerice, obţinem $i = 0{,}05$ A.

Curentul final se determină din limita

$$i' = \lim_{t\to\infty} \frac{E}{R}\exp(-\frac{t}{RC}) = 0$$

6.5. Folosind ecuaţia $Q = C\,V_o\left[1-\exp(-\frac{t}{RC})\right]$ să se determine timpul după care sarcina reprezintă $1 - \frac{1}{e}$ din valoarea sa finală.

R.: Valoarea finală a sarcinii de pe armăturile condensatorului este:

$$Q' = \lim_{t\to\infty} C\,V_o\left[1-\exp(-\frac{t}{RC})\right] = C\,V_o$$

Timpul după care sarcina reprezintă $1 - \frac{1}{e}$ din valoarea sa finală se determină din ecuaţia:

$$(1 - \frac{1}{e})\,C\,V_o = C\,V_o\left[1-\exp(-\frac{t}{RC})\right] \quad \text{deci} \quad t = RC$$

6.6. O tensiune de 80 V este aplicată brusc între punctul A şi masă în circuitul din fig.6.6. a) Care este ecuaţia tensiunii măsurate în punctul B în funcţie de timp? b) După cît timp tensiunea atinge $1 - \frac{1}{e}$ din valoarea sa finală?

R.: a) Fie i valoarea curentului la momentul t şi u valoarea tensiunii la bornele condensatorului (tensiunea măsurată între punctul B şi masă, $u = \frac{q}{C}$).

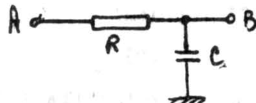


Fig. 6.6.

Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$R\,i + u = V_o$$

(V_o fiind tensiunea aplicată între punctul A şi masă).

Deoarece $i = \frac{dq}{dt}$ obţinem ecuaţia diferenţială în q

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_o$$

cu soluţia generală

$$q = V_o C\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Deci tensiunea între punctul B şi masă este:

$$u = V_o\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

b) Valoarea finală a acestei tensiuni este

$$u' = \lim_{t \to \infty} u(t) = V_o$$

Timpul după care tensiunea atinge $1 - \frac{1}{e}$ din valoarea sa finală se determină din ecuaţia:

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) V_o = V_o\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Deci $t = RC$.

6.7. Fie un circuit electric format din două condensatoare C_1 şi C_2, un rezistor R şi un întrerupător K. Condensatorul de capacitate C_1 se încarcă la tensiunea iniţială U_o. Condensatorul de capacitate C_2 este iniţial descărcat. Intrerupătorul K se închide la t = 0. Să se calculeze: a) intensitatea curentului în regimul tranzitoriu, b) tensiunea condensatorului C_2 ca funcţie de timp.

R.: a) Fie i curentul prin circuit, u_1 tensiunea la bornele condensatorului C_1 ($u_1 = \frac{q_1}{C_1}$), iar u_2 tensiunea la bornele condensatorului C_2($u_2 = \frac{q_2}{C_2}$) la momentul t.

Cda 265/1991 Fasc. 15

$$i = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = -C_1\frac{du_1}{dt} = C_2\frac{du_2}{dt}\text{, iar } q_1+q_2 = CU_0 \qquad (1)$$

Scriind legea a doua a lui Kirchhoff obţinem:

$$R\,i + u_2 - u_1 = 0 \qquad (2)$$

Derivînd această ecuaţie (2) şi folosind relaţiile (1) obţinem ecuaţia diferenţială în i :

$$R\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

a cărei soluţie este $i = A\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)$. Constanta de integrare A se determină din condiţiile iniţiale $u_1(0) = U_0$ şi $u_2(0) = 0$; dar $R\,i(0) + u_2(0) - u_1(0) = 0$, deci $A = U_0/R$.

In concluzie, intensitatea curentului în regim tranzitoriu are expresia:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)$$

b) Tensiunea condensatorului C_2 este:

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt = \frac{U_0}{C_2R}\int_0^t \exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right) =$$

$$= -\frac{C_1U_0}{C_1+C_2}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{C_1U_0}{C_1+C_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)\right]$$

<u>6.8</u>. Un condensator de capacitate C_1 încărcat la tensiunea U_0 se conectează la un condensator neîncărcat de capacitate C_2 prin intermediul unei rezistenţe R şi a unui întrerupător. Intrerupătorul se închide la t = 0. Să se calculeze: a) tensiunea electrică finală a condensatoarelor; b) diferenţa dintre energia electrică acumulată iniţial în condensatorul C_1 şi energia electrică totală acumulată final în cele două condensatoare.

<u>R</u>.: a) Conform problemei 6.7, tensiunile u_1 şi u_2 la bornele condensatoarelor sînt:

$$u_1 - U_o = -\frac{1}{C_1}\int_o^t i\ dt = -\frac{U_o}{RC_1}\int_o^t \exp(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t) =$$

$$= \frac{U_oC_2}{C_1+C_2}\left[\exp(-\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R}t) - 1\right]$$

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int_o^t i\ dt = \frac{C_1U_o}{C_1+C_2}\left[1 - \exp(-\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R}t)\right]$$

Tensiunea electrică finală a condensatoarelor este

$$U = u_1' = u_2' = \lim_{t\to\infty} u_2(t) = \lim_{t\to\infty} u_1(t) = \frac{C_1U_o}{C_1+C_2}$$

b) Pierderea de energie electrică în decursul regimului tranzitoriu este:

$$-\Delta W = W_i - W_f = \frac{C_1U_o^2}{2} - \frac{C_1+C_2}{2}U^2 = \frac{C_1C_2U_o^2}{2(C_1+C_2)}$$

Energia degajată prin efect Joule prin rezistorul R este:

$$W_j = \int_o^\infty R\ i^2dt = \frac{U_o^2}{R}\int_o^\infty \exp(-\frac{2(C_1+C_2)}{R\ C_1C_2}t)dt = \frac{C_1C_2U_o^2}{2(C_1+C_2)}$$

Deci pierderea de energie electrică în decursul regimului tranzitoriu este egală cu energia disipată prin efect Joule în rezistorul R (deci $W_i = W_f + W_j$ ce reprezintă conservarea energiei). Se observă că această pierdere de energie prin efect Joule, la redistribuirea sarcinii pe condensatoare nu depinde de valoarea rezistenței electrice.

6.9. Fie schema din fig.6.9. Să se determine tensiunea la bornele condensatorului în regim tranzitoriu. Intrerupătorul se închide la t = 0.

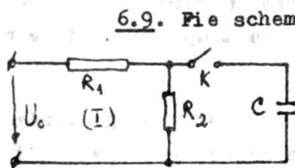


Fig.6.9.

R.: Fie i curentul prin rezistorul R_1, i_2 curentul prin rezistorul R_2, i_1 curentul de încărcare a condensatorului, iar u tensiunea la bornele acestuia la momentul t. Scriem prima lege a lui Kirchhoff: $i_1 + i_2 = i$ şi legea lui Ohm

$$i_2 = \frac{u}{R_2} \quad \text{și} \quad i_1 = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \quad \text{rezultă} \quad i = \frac{u}{R_2} + C\frac{du}{dt} \qquad (1)$$

Din legea a doua a lui Kirchhoff în ochiul I rezultă:

$$i R_1 + u = U_o \qquad (2)$$

Introducînd relația (1) în relația (2) obținem ecuația diferențială în u:

$$CR_1 \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)u = U_o$$

cu condiția inițială

$$u(0) = 0$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$u(t) = A \exp\left(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t\right) + \frac{U_oR_2}{R_1+R_2}$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială, astfel:

$$A = -\frac{U_oR_2}{R_1+R_2}$$

Deci tensiunea la bornele condensatorului în regim tranzitoriu este:

$$u(t) = \frac{U_o R_2}{R_1+R_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t\right)\right]$$

Valoarea finală a acestei tensiuni este

$$u' = \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{U_o R_2}{R_1+R_2}$$

<u>6.10</u>. Fie un circuit electric, format dintr-o sursă, un condensator C, un rezistor R și un întrerupător K. La momentul $t = 0$ tensiunea sursei este zero, iar întrerupătorul este deschis. Tensiunea sursei se modifică liniar în timp. Să se determine curentul de încărcare.

<u>R</u>.: Fie i curentul prin circuit, q sarcina de pe armăturile condensatorului și $U = \alpha t$ tensiunea sursei la momentul t. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff

$$R i + \frac{q}{C} = \alpha t$$

Derivăm această relație și obținem ecuația diferențială:

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\alpha$$

Soluţia ecuaţiei omogene este $i = A\exp(-\frac{t}{RC})$. Soluţia generală a ecuaţiei se determină prin metoda variaţia constantelor; astfel:

$$\frac{di}{dt}=\frac{dA}{dt}\exp(-\frac{t}{RC})-\frac{A}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})$$

Introducînd în ecuaţia diferenţială, obţinem:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\alpha}{R}\exp(\frac{t}{RC}) \quad \text{deci} \quad A=\alpha C\exp(\frac{t}{RC})+A_0$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este deci:

$$i=A_0\exp(-\frac{t}{RC})+\alpha C$$

Constanta de integrare A_0 se determină din condiţia iniţială $i(0) = 0$.

Rezultă deci pentru i expresia:

$$i=\alpha C\left[1-\exp(-\frac{t}{RC})\right]$$

6.11. O bobină cu rezistenţa de 0,01 Ω şi inductanţa 0,5 mH este legată la o baterie de 12 V, de rezistenţă internă neglijabilă.

a) După cît timp de la închiderea circuitului curentul reprezintă 90% din valoarea sa finală? b) La acest moment, ce energie este înmagazinată în cîmpul magnetic?

R.: a) Fie i curentul ce trece prin circuit la momentul t. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$Ri=-L\frac{di}{dt}+E$$

Rezultă ecuaţia diferenţială neomogenă $L\frac{di}{dt}+Ri=E$ cu soluţia generală $i(t)=A\exp(-\frac{R}{L}t)+\frac{E}{R}$. Constanta de integrare A se determină din condiţia iniţială $i(0) = 0$.

Rezultă că $A=-\frac{E}{R}$, deci expresia curentului este

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-\exp(-\frac{R}{L}t)\right]$$

Valoarea sa finală este $i'=\lim_{t\to\infty} i(t)=\frac{E}{R}$.

Timpul după care curentul reprezintă 90% din valoarea

sa finală este determinat din ecuaţia:

$$\frac{90}{100}\ \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left[1 - \exp(-\frac{R}{L}\ t)\right]$$

Deci

$$t = \frac{L}{R}\ln 10 = 0,115\ s$$

b) $W = \frac{Li^2}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{9}{10}\ \frac{E}{R}\right)^2 = \frac{81}{200}\ \frac{LE^2}{R^2} = 291\ J$

6.12. Intr-un circuit RL, $R = 4\,\Omega$, curentul creşte de la 0 la 10 A în 0,001 s, la o tensiune aplicată de 50 V. Care este inductanţa circuitului?

R.: Curentul prin circuit are expresia (vezi problema 6.11):

$$i = \frac{E}{R}\left[1 - \exp(-\frac{R}{L}\ t)\right]$$

Deci

$$\exp(-\frac{R}{L}\ t) = \frac{E-R_i}{E}$$, logaritmînd rezultă că:

$$\frac{R}{L}t = \ln\frac{E}{E-R_i}\ ,\quad \text{deci}\quad L = \frac{R\ t}{\ln\frac{E}{E-R_i}} = 25\ \mu H$$

6.13. O tensiune de 100 V se aplică unui circuit RL, $R = 90\,\Omega$, $L = 30$ H. După cît timp curentul creşte de la 0 la 1 A?

R.: Conform problemei 6.12, timpul t după care curentul creşte de la 0 la i este:

$$t = \frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-R_i}\quad \text{deci}\quad t = 0,7(6)\ s$$

6.14. O rezistenţă de $2\,\Omega$ şi o bobină de inductanţă 10 H sînt legate în serie şi alimentate de la o tensiune de 10 V. La un moment dat în circuit se măsoară un curent de 2 A: a) Care este tensiunea pe bobină? b) Care este viteza de schimbare a curentului în circuit?

R.: a) Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$R\,i + U_L = E \quad \text{sau}\quad R\,i + L\frac{di}{dt} = E$$

Deci

$$U_L = E - R\,i = 6\ V$$

b) Viteza de schimbare a curentului în circuit este

$$\frac{di}{dt} = \frac{E-R\ i}{L} = \frac{U_L}{L} = 0,6\ \frac{A}{s}$$

6.15. O bobină cu inductivitatea $L = 0,2$ H este parcursă pînă la momentul $t = 0$ de un curent continuu cu intensitatea $I = 5$ A. La momentul $t = 0$ bobina se scurtcircuitează. Constanta de timp a bobinei este $\tau = 0,01274$ s. Se cer: a) intensitatea curentului din bobină pentru $t > 0$; b) energia disipată în bobină prin efect Joule în intervalul de timp $(0, \infty)$.

R.: a) Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$R\ i + L\ \frac{di}{dt} = 0$$

Această ecuaţie diferenţială are soluţia

$$i = A\ \exp(-t/\tau) \quad \text{unde } \tau = \frac{L}{R}$$

este constanta de timp a bobinei. Constanta de integrare A se determină din condiţia iniţială $i(0) = I$, deci expresia intensităţii curentului din bobină pentru $t > 0$ este:

$$i(t) = I\ \exp(-\frac{t}{\tau}) = 5\ \exp(-78,4\ t)(A)$$

b) Energia disipată în bobină prin efect Joule în intervalul de timp $(0, \infty)$ este:

$$W = \int_0^{\infty} R\ i^2 dt = R\ I^2 \int_0^{\infty} \exp(-\frac{2t}{\tau})dt = \frac{L\ I^2}{2} = 2,5\ J$$

Se observă că energia disipată prin efect Joule în bobină în intervalul de timp $(0, \infty)$ este egală cu energia magnetică iniţială a bobinei.

6.16. O bobină cu rezistenţa $R = 12\ \Omega$ şi inductanţa $L = 0,2$ H alimentată în curent continuu se scurtcircuitează la momentul $t = 0$. Puterea disipată în bobină prin efect Joule are valoarea instantanee $p = 768\ \exp(-120\ t)$ (W). Se cer: a) t.e.m. de autoinducţie ca funcţie de timp; b) sarcina electrică ce va trece prin secţiunea bobinei după scurtcircuitare.

R.: a) Expresia intensităţii curentului ce trece prin circuit (vezi problema 6.15) este $i = I\ \exp(-\frac{R}{L}\ t)$.

Valoarea instantanee a puterii disipate în bobină prin efect Joule este:

$$p = R\,i^2 = R\,I^2 \exp(-\frac{2\,R\,t}{L}) \quad \text{deci} \quad I = 8\ A$$

T.e.m. de autoinducţie are expresia:

$$e = -L\,\frac{di}{dt} = R\,I\,\exp(-\frac{Rt}{L}) = 96\,\exp(-60\,t)\,(V)$$

b) Sarcina electrică ce va trece prin secţiunea bobinei după scurtcircuitare este:

$$q = \int_0^t i\,dt = \frac{IL}{R}\left[1-\exp(-\frac{Rt}{L})\right] = 0,1(3)\left[1-\exp(-60\,t)\right](C)$$

6.17. O bobină cu rezistenţa R = 100Ω şi inductanţa L se conectează brusc la t = 0 la o reţea de curent continuu. Puterea maximă disipată în bobină prin efect Joule este p_{max} = = 100 W. Energia magnetică maximă a bobinei este W_{max} = 0,1 J. Se cer: a) inductanţa bobinei; b) constanta de timp a circuitului; c) t.e.m. a sursei de curent continuu; d) viteza de creştere a intensităţii curentului electric.

R.: a) Intensitatea curentului ce trece prin circuit are expresia (vezi problema 6.11):

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp(-\frac{Rt}{L})\right] \tag{1}$$

Puterea disipată în bobină prin efect Joule este:

$$p = R\,i^2 = \frac{E^2}{R}\left[1 - \exp(-\frac{Rt}{L})\right]^2 \tag{2}$$

Valoarea ei maximă este:

$$p_{max} = \frac{E^2}{R} \tag{3}$$

Energia magnetică a bobinei are expresia:

$$W = \frac{L\,i^2}{2} = \frac{LE^2}{2R^2}\left[1 - \exp(-\frac{Rt}{L})\right]^2 \tag{4}$$

Valoarea ei maximă este

$$W_{max} = \frac{L\,E^2}{2\,R^2} \tag{5}$$

Din relaţiile (3) şi (5) rezultă expresia inductanţei bobinei:

$$L = \frac{2\,R\,W_{max}}{p_{max}} \tag{6}$$

deci $L = 0{,}2$ H.

b) Constanta de timp a bobinei este:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2\,W_{max}}{p_{max}} = 2 \text{ ms}$$

c) T.e.m. a sursei de curent continuu este:

$$E = \sqrt{R\,p_{max}} = 100 \text{ V}$$

d) Viteza de creştere a intensităţii curentului electric are expresia:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = 500\exp(-500\,t)\left(\frac{A}{s}\right)$$

6.18. Doi condensatori de capacităţi C_1 şi C_2 se leagă în serie cu o bobină de inductanţă L. Iniţial pe condensatorul C_1 avem sarcina Q. Să se determine intensitatea curentului care trece prin bobină după închiderea circuitului.

R.: Fie i curentul prin circuit, u_1 tensiunea la bornele condensatorului C_1 $\left(i = -\frac{dq_1}{dt} = -C_1\frac{du_1}{dt}\right)$, u_2 tensiunea la bornele condensatorului C_2 $\left(i = \frac{dq_2}{dt} = C_2\frac{du_2}{dt}\right)$ la momentul t.

Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt} + u_2 - u_1 = 0$$

Derivăm această relaţie:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i = 0$$

Notînd $\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2} = \omega_0^2$ obţinem ecuaţia diferenţială

$$i'' + \omega_0^2\, i = 0$$

Deoarece $i(0) = 0$ rezultă că $i(t) = A\sin\omega_0 t$.

Constanta de integrare A se determină din condiţia

$$L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} + u_2(0) - u_1(0) = 0$$

dar

$$u_1(0) = \frac{Q}{C_1}, \quad u_2(0)=0, \quad L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = L\,A\,\omega_0$$

Deci $A = \frac{Q}{LC_1\omega_0}$, rezultă că expresia curentului prin

circuit este

$$i(t) = \frac{Q}{LC_1\omega_0} \sin \omega_0 t$$

6.19. Se leagă în serie un condensator de capacitate C, o bobină de inductanță L, o sursă cu t.e.m. E_o şi un întrerupător inițial deschis. Condensatorul este inițial descărcat. Determinați valoarea curentului după închiderea întrerupătorului. Rezistența ohmică din circuit se neglijează.

R.: Fie i curentul ce trece prin circuit la momentul t şi fie q sarcina de pe armăturile condensatorului la acelaşi moment de timp. Prin derivarea relației ce exprimă legea a doua a lui Kirchhoff scrisă pentru acest circuit obținem:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = E_o$$

rezultă ecuația diferențială de ordin doi în i: $i'' + \omega_o^2 i = 0$, $\omega_o^2 = 1/LC$. Ținînd cont că $i(0) = 0$, soluția ecuației este $i = A \sin \omega_o t$. Constanta de integrare A se determină din condiția

$$L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = E_o . \quad \text{Deci} \quad A = E_o/(L\omega_o)$$

Expresia intensității curentului este:

$$i(t) = E_o\sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_o t$$

6.20. Fie un circuit format dintr-o bobină de inductanță L, un condensator de capacitate C, o sursă de curent continuu de t.e.m. E şi un întrerupător, inițial deschis. Aflați curentul maxim şi tensiunea maximă pe condensator după închiderea întrerupătorului. Se dau E, L, C.

R.: Ținînd cont de rezultatele obținute în problema 6.19 rezultă că, valoarea maximă a curentului este:

$$I_{max} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i\, dt = \frac{E}{CL\omega_o}\int_0^t \sin\omega_o t = E(1-\cos\omega_o t)$$

Valoarea maximă a tensiunii pe condensator este deci:

$$U_{c_{max}} = 2\,E$$

6.21. O bobină de inductanţă L se leagă la bornele unui condensator de capacitate C, încărcat în prealabil la tensiunea U_o. Să se determine curentul din circuit.

R.: Fie i intensitatea curentului ce trece prin circuit la momentul t, iar q sarcina de pe armăturile condensatorului la momentul t. Legea a doua a lui Kirchhoff scrisă pentru acest circuit ne conduce la relaţia:

$$L\,\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Derivînd această relaţie obţinem ecuaţia diferenţială omogenă de ordin doi în i:

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \omega_o^2\, i = 0\ , \quad \text{unde}\ \ \omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$i(t) = A_1 e^{\omega_o t} + A_2\, e^{-\omega_o t}$$

Dar $i(0) = 0$, deci soluţia problemei este de forma:

$$i = A\ \mathrm{sh}\,\omega_o t$$

Constanta de integrare se determină din condiţia:

$$L\,\frac{di}{dt}\bigg|_{t\,=\,0} - U_o = 0$$

Deci constanta de integrare A este $A = U_o/(L\,\omega_o)$.
Curentul ce trece prin circuit are expresia:

$$i(t) = U_o\,\sqrt{\frac{C}{L}}\ \mathrm{sh}\,\omega_o t$$

6.22. Două bobine cu inductanţa L_1 şi L_2 sînt legate în paralel. Ce curenţi vor trece prin bobine dacă se leagă în paralel cu un condensator cu capacitatea C, încărcat în prealabil la tensiunea U?

R.: Fie i valoarea instantanee a curentului prin circuit, i_1 valoarea instantanee a curentului ce trece prin bobina de inductanţă L_1, iar i_2 valoarea instantanee a curentului ce trece prin bobina de inductanţă L_2, iar q sarcina de pe armăturile condensatorului. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff:

$$L_e \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

unde L_e este inductanţa echivalentă a sistemului de bobine.

Din derivarea acestei relaţii, rezultă ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \omega_o^2 i = 0 \quad \text{unde } \omega_o^2 = \frac{1}{L_e C} \qquad (1)$$

Soluţia acestei ecuaţii (vezi problema 6.21) este:

$$i(t) = U \sqrt{\frac{C}{L_e}} \, \text{sh}\, \omega_o t \qquad (2)$$

Scriind legea întîi a lui Kirchhoff avem $i = i_1 + i_2$.

Bobinele fiind legate în paralel, tensiunile pe ele sînt aceleaşi:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_e \frac{di}{dt} \qquad (3)$$

Din integrarea relaţiei (3) rezultă

$$L_1 i_1 = L_2 i_2 = L_e i \qquad (4)$$

Derivînd relaţia (2) obţinem

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \qquad (5)$$

Din relaţiile (3) şi (5) obţinem expresia inductanţei echivalente

$$L_e = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \qquad (6)$$

Din relaţiile (2), (4) şi (6) rezultă expresiile curenţilor ce trec prin bobine:

$$i_1(t) = U \sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}} \, \text{sh}\, \omega_o t$$

$$i_2(t) = U \sqrt{\frac{C L_1}{L_2(L_1+L_2)}} \, \text{sh}\, \omega_o t$$

7. ECUAȚIILE LUI MAXWELL

7.1. Intr-o regiune din spațiu avem un cîmp magnetic uniform paralel cu axa z. Mărimea lui variază după legea $B = B_0 \sin \omega t$. Să se determine cîmpul electric E în fiecare punct al spațiului.

R.: Alegem un contur Γ de rază r.

Folosim următoarea ecuație a lui Maxwell sub formă integrală $\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \vec{B}\, d\vec{S}$. Această ecuație, pentru această problemă devine:

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}(SB_0 \sin \omega t) \quad \text{deci} \quad E = -\frac{1}{2} r B_0 \omega \cos \omega t$$

7.2. Un condensator cu plăcile paralele, circulare de rază R, este conectat la un generator de curent alternativ. Condensatorul se încarcă cu sarcina $q = q_0 \sin \omega t$. Liniile cîmpului magnetic indus, sînt cercuri concentrice cu axa de simetrie a condensatorului. Să se afle cîmpul magnetic în funcție de distanța de la axa de simetrie pentru $r < R$, $r = R$ și $r > R$ (neglijăm efectele de margine).

R.: Cîmpul magnetic indus îl determinăm cu ajutorul legii circuitului magnetic, sub forma integrală.

$$\left(\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \vec{E}\, d\vec{S}\right)$$

Alegem un contur Γ de rază $r < R$. Putem scrie:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Dar

$$E = \frac{U}{d} = \frac{q}{C\, d} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2}$$

Deci

$$B = \frac{\mu_0 \omega q_0 r \cos \omega t}{2\pi R^2}$$

Pentru $r > R$, alegem un contur de rază $r > R$. Legea circuitului magnetic în acest caz are forma:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

Deci cîmpul magnetic are valoarea:

$$B = \frac{\mu_0 \omega q_0 \cos\omega t}{2\pi r}$$

Pentru r = R cîmpul magnetic are expresia:

$$B = \frac{\mu_0 \omega q_0 \cos\omega t}{2\pi R}$$

7.3. Considerăm o undă electromagnetică de forma:

$$E_y = E_0 \sin \omega (t - \frac{x}{c})$$

$$B_z = B_0 \sin \omega (t - \frac{x}{c})$$

care se propagă în direcţia x cu viteza c. Să se determine raportul valorilor instantanee E_y/B_z.

R.: Raportul valorilor instantanee $\frac{E_y}{B_z}$ conform expresiilor date este:

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{E_0}{B_0}$$

Pentru determinarea lui E_0/B_0 folosim următoarea ecuaţie a lui Maxwell:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

In cazul nostru

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \vec{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Deci

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{sau} \quad - \frac{\omega}{c} E_0 \cos\omega (t - \frac{x}{c}) = -\omega B_0 \cos\omega (t- \frac{x}{c})$$

Rezultă că $\frac{E_0}{B_0} = c$. Deci raportul $E_y/B_z = c$

7.4. Să se arate că următorul cîmp electromagnetic satisface ecuaţiile lui Maxwell:

$E_x = E_y = 0 \qquad E_z = c\cdot\cos(y-ct)$

$B_x = \cos(y-ct) \qquad B_y = B_z = 0$

R.: Fie ecuaţia lui Maxwell:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,\frac{\partial E_z}{\partial y} - \vec{j}\,\frac{\partial E_z}{\partial x} =$$

$$= \vec{i}\,\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\vec{i}\,c\,\sin(y-ct) =$$

$$= -\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial t}(\cos(y-ct)) = -\vec{i}\,\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Fie ecuaţia lui Maxwell:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{j}\,\frac{\partial B_x}{\partial z} - \vec{k}\,\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\vec{k}\,\frac{\partial B_x}{\partial y} = \vec{k}\,\sin(y-ct) =$$

$$= \frac{\vec{k}}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\cos(y-ct)) = \frac{\vec{k}}{c^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} =$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\vec{k}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Fie ecuaţia lui Maxwell $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Fie ecuaţia lui Maxwell $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Deci cîmpul electromagnetic considerat satisface ecuaţiile lui Maxwell.

7.5. Care este condiţia ca unda

$$E_x = E_z = 0 \ ; \qquad E_y = E_o y \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

să satisfacă ecuaţia undelor electromagnetice.

R.: Intr-un spaţiu în care nu avem sarcini sau curenţi, vectorul intensitatea cîmpului electric satisface următoarea ecuaţie:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Se observă că componentele E_x şi E_z satisfac această ecuaţie. Ca unda dată să satisfacă ecuaţia undelor electromagnetice, trebuie verificată şi relaţia:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Ţinînd cont de expresia lui E_y obţinem

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\omega^2}{v^2} E_o \cdot y \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = -\frac{\omega^2}{v^2} \cdot E_y$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y$$

Deci, putem scrie:

$$\omega^2 \cdot E_y \cdot \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right) = 0$$

Rezultă că condiţia ca unda dată să satisfacă ecuaţia undelor electromagnetice este ca $v = c$.

7.6. Să se verifice, în cazul particular al unui condensator cilindric, egalitatea dintre curentul de conducţie prin firele de conexiune şi curentul de deplasare prin dielectricul dintre armăturile sale.

R.: Curentul de conducţie prin firele de conexiune are valoarea:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

în care q este sarcina electrică de pe armătura pozitivă.

Scriem legea lui Gauss pentru cîmpul electric, pentru un contur Σ cilindric ce conţine cilindrul interior:

$$\int_{S_\Sigma} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

Curentul de deplasare prin dielectricul dintre armăturile condensatorului cilindric este:

$$I_d = \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{S_\Sigma} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{dq}{dt} = I$$

7.7. Un condensator cu plăci plane circulare de rază a, paralele, este încărcat încet. Distanţa dintre plăci este h. Să se arate că viteza cu care pătrunde energia în spaţiul dintre plăcile condensatorului folosind vectorul lui Poynting este egală cu viteza de creştere a energiei electrostatice înmagazinată între plăcile condensatorului.

R.: Intre plăcile condensatorului există un cîmp electric aproape uniform, variabil în timp. Liniile cîmpului magnetic, indus între plăcile condensatorului, sînt cercuri concentrice cu axa care trece prin centrul armăturilor. Acest cîmp magnetic se determină cu ajutorul legii circuitului magnetic, pe un contur Γ de rază a:

$$\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \varepsilon \mu \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \vec{E}\, d\vec{S}$$

Considerăm că pe acest contur, inducţia magnetică este constantă. Deci putem scrie:

$$B \cdot 2\pi a = \varepsilon \mu \frac{dE}{dt} \cdot \pi a^2$$

Rezultă că expresia cîmpului magnetic indus este

$$B = \frac{\varepsilon \mu a}{2} \frac{dE}{dt}$$

Vectorul Poynting $\vec{S}$ se defineşte astfel $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$. In cazul nostru $\vec{E} \perp \vec{B}$ deci $S = \frac{1}{\mu} E B =$

$$= \frac{\varepsilon a}{2} E \frac{dE}{dt}$$

Fluxul vectorului Poynting prin suprafaţa laterală a spaţiului dintre armături (viteza cu care pătrunde energia în spaţiul dintre plăci) este:

$$\varphi_S = S\cdot 2\pi a\, h = \varepsilon \pi a^2 h \cdot E \frac{dE}{dt}$$

Densitatea de energie electrică din spaţiul dintre plăci este:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

Energia electrostatică înmagazinată între plăcile condensatorului are expresia:

$$W_e = w_e \cdot \pi a^2 h = \frac{1}{2} \varepsilon \pi a^2 h\, E^2$$

Viteza de creştere a energiei electrostatice înmagazinată între plăcile condensatorului este:

$$\frac{dW_e}{dt} = \varepsilon \pi a^2 h\, E \frac{dE}{dt}$$

Se observă că $\varphi_S = \frac{dW_e}{dt}$, deci viteza cu care pătrunde energia în spaţiul dintre plăci este egală cu viteza de creştere a energiei electrostatice înmagazinată în dielectric.

7.8. Un mediu neomogen, dar izotrop având o permitivitate ε şi conductivitate σ, este străbătut de un curent staţionar de densitate $\vec{j}$. Să se arate că în mediul respectiv trebuie să existe sarcini de volum şi să se calculeze densitatea de volum ρ a acesteia.

R.: Densitatea de volum ρ a sarcinilor din mediu se determină folosind ecuaţia lui Maxwell

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D}$$

Dar $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. Folosind forma locală a legii lui Ohm rezultă pentru inducţia electrică expresia:

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \vec{j}$$

Deci putem scrie:

$$\rho = \operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \vec{j}\right) = \vec{j}\, \operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \frac{\varepsilon}{\sigma} \operatorname{div} \vec{j} = \vec{j}\, \operatorname{grad}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Am ţinut cont că curentul de densitate $\vec{j}$ este staţionar $(\operatorname{div} \vec{j} = 0)$.

7.9. In interiorul unei sfere de rază r se găsesc parti-

cule încărcate. Particulele sînt ejectate radial, astfel încît curentul radial are aceeași intensitate în toate direcțiile. Densitatea de sarcină în interiorul sferei este ρ . Să se exprime densitatea curentului radial în funcție de sarcina totală din sferă, precum și de intensitatea cîmpului electric. Să se determine, de asemenea și cîmpul magnetic indus.

R.: Folosim forma integrală a ecuației de continuitate:

$$\int_{\Sigma} \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_{V_{\Sigma}} \rho\, dV$$

Deoarece densitatea curentului radial are aceeași valoare pe suprafața sferei de rază r atunci:

$$\int_{\Sigma} \vec{j}\, d\vec{S} = j(r)\cdot 4\pi r^2$$

Sarcina totală din interiorul sferei este

$$Q(r) = \int_{V} \rho\, dV$$

Deci densitatea curentului radial se exprimă cu ajutorul sarcinii totale din sferă astfel:

$$j(r) = -\frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{\partial Q(r)}{\partial t}$$

Cîmpul electric la distanța r este:

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Deci: $$j(r) = -\varepsilon_0\,\frac{\partial E(r)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{j} = -\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cîmpul magnetic îl determinăm cu ajutorul ecuației lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ținînd cont de expresia densității curentului de conducție

$$\vec{j} = -\varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rezultă că rot}\,\vec{B} = 0,$$

deci cînd particulele sînt ejectate radial nu se induce cîmp

magnetic.

7.10. Intr-un mediu de permitivitate ε_0, conductivitate σ concentraţia electronilor liberi este n. Să se scrie ecuaţia de mişcare a unui electron în prezenţa unui cîmp electric sinusoidal $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, ştiind că asupra electronului acţionează o forţă rezistentă proporţională cu viteza sa $(\vec{F}_r = -m \frac{\vec{v}}{\tau})$.

Să se scrie conductivitatea în funcţie de pulsaţia cîmpului electric. Să se determine, de asemenea, la frecvenţe mari, relaţia care există între vectorul de undă $\vec{k}$ al unei unde plane electromagnetice ce se propagă în acest mediu şi pulsaţia ω.

R.: Scriem principiul al doilea al dinamicii pentru electronul aflat în cîmp electric:

$$m \frac{dv}{dt} = e E - m \frac{v}{\tau} \qquad (1)$$

Pentru a determina viteza electronului rezolvăm ecuaţia diferenţială neomogenă:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{eE}{m} \qquad (2)$$

Soluţia ecuaţiei omogene este:

$$v(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (3)$$

Soluţia ecuaţiei neomogene se determină prin metoda "Variaţia constantelor". Astfel:

$$\dot{v}(t) = \dot{C}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} C(t) e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (4)$$

Inlocuind relaţiile (3) şi (4) în ecuaţia (2) obţinem ecuaţia diferenţială pentru constanta C(t):

$$\frac{dC}{dt} = \frac{eE_0}{m} e^{\frac{t(1+i\omega\tau)}{\tau}}$$

Deci expresia vitezei electronilor este:

$$\vec{v}(t) = \frac{e\tau\vec{E}(t)}{(1+i\omega\tau)m}$$

Dar $\vec{j} = n e \vec{v} = \sigma \vec{E}$ rezultă că $\sigma = \frac{n e \vec{v}}{\vec{E}}$

In cazul nostru conductivitatea mediului are expresia:

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m(1+i\omega\tau)} = \frac{n e^2 \tau}{m(1+\omega^2\tau^2)} - i\frac{\omega\tau^2 n e^2}{m(1+\omega^2\tau^2)}$$

La frecvenţe mari termenul $\omega\tau \gg 1$ şi deci

$$\sigma = -i\frac{n e^2}{m\omega} .$$

Pentru determinarea numărului de undă folosim ecuaţiile lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

şi forma locală a legii lui Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (4)$$

Aplicăm operatorul rotor relaţiei (3) obţinem:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}$$

dar $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

Deci obţinem:

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - i\omega\mu_0\sigma)\vec{E} = 0 \qquad (5)$$

La frecvenţe mari $\sigma = -i\frac{n e^2}{m\omega}$. Rezultă că relaţia (5) se poate scrie:

$$\left[\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{n e^2}{m\varepsilon_0}\right)\right]\vec{E} = 0$$

Termenul $\frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{n e^2}{m\varepsilon_0}\right)$ reprezintă chiar pătratul numărului de undă:

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}\right)$$

Notînd cu $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}$ rezultă că pentru $\omega > \omega_p$ numărul de undă este real (unda este transmisă), iar pentru $\omega < \omega_p$ numărul de undă este pur imaginar (unda este reflectată total).

7.11. O undă electromagnetică plană $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ se propagă într-un mediu de permitivitate dielectrică ε_0 şi permeabilitate magnetică μ_0, astfel încît densitatea de curent este $\vec{j}$. Să se arate că pătratul numărului de undă este complex $k^2 = a+ib$. De asemenea, să se determine penetraţia δ (distanţa pe care cîmpul se reduce de e ori).

R.: Folosim ecuaţiile lui Maxwell:

$$\nabla \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

şi forma locală a legii lui Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{4}$$

Aplicăm operatorul rotor relaţiei (3), deci:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

Ţinem cont că

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

Deci putem scrie că:

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu_0\left(\varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\vec{E} = 0 \tag{5}$$

E ca şi cum mediul ar avea permitivitatea complexă $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}$. Deci pătratul numărului de undă este complex:

$$\tilde{k}^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o + i\omega \mu_o \sigma \qquad (6)$$

Scriem numărul de undă complex sub forma:

$$\tilde{k} = k + i\,\frac{\alpha}{2} \qquad (7)$$

Intensitatea cîmpului electric are deci expresia:

$$\vec{E} = \vec{E}_o \exp i(k\,\vec{1}_k\vec{r} - \omega t)\,\exp(-\frac{\alpha}{2}\,\vec{1}_k\,\vec{r})$$

unde $\vec{1}_k$ este versorul vectorului de undă $\vec{k}$.

Intensitatea undei electrice I_E are expresia:

$$I_E = \vec{E}\cdot\vec{E}^* = E_o^2 \exp(-\alpha\,\vec{1}_k\,\vec{r}) = I_o \exp(-\alpha\,\vec{1}_k\,\vec{r})$$

Deci unda electromagnetică dată se atenuează. Ridicînd relaţia (7) la pătrat şi introducînd-o în relaţia (6) se obţine:

$$\alpha k = \omega \mu_o \sigma$$
$$k^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o$$

de unde $\alpha^2 = 2\omega^2 \mu_o(\varepsilon_o + \sqrt{\varepsilon_o^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}})$

Să considerăm că unda se propagă pe direcţia z:

$$I_E = I_o\, e^{-\alpha z}$$

Cîmpul se reduce de e ori pe o distanţă

$$\delta = \frac{\alpha}{2} = \omega \sqrt{\frac{\mu_o \varepsilon_o}{2} + \frac{\mu_o}{2}\sqrt{\varepsilon_o^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}$$

7.12. Fie un mediu ce conţine în unitatea de volum n electroni (de sarcină -e şi masă m) şi n ioni (de sarcină e şi masă M). In acest mediu acţionează un cîmp electric sinusoidal $\vec{E} = \vec{E}_o \exp(i\omega t)$ ce determină mişcarea ionilor şi a electronilor. Să se determine polarizaţia mediului datorată mişcării ionilor, precum şi polarizaţia totală P. De asemenea, să se determine permitivitatea mediului $\varepsilon = \varepsilon_o + P$. Folosind ecuaţiile lui Maxwell să se arate că putem scrie:

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{unde } \varepsilon = \varepsilon_o + P$$

R.: Aplicăm principiul al doilea al dinamicii ionilor:

$$M\ddot{x} = e E_o\, e^{i\omega t}$$

Integrînd de două ori obţinem $x = -\frac{eE}{M\omega^2}$.

Momentul de dipol creat este:

$$p = e \cdot x = -\frac{e^2E}{M\omega^2}$$

Dacă n este numărul de ioni din unitatea de volum din mediu, polarizaţia mediului datorată mişcării ionilor P_i este chiar np. Deci

$$P_i = -\frac{n\,e^2E}{M\omega^2}$$

Mişcarea electronilor în cîmpul electric sinusoidal este dată de ecuaţia:

$$m\,\ddot{x}_1 = e\,E_0 e^{i\omega t}\text{, deci } x_1 = -\frac{eE}{m\omega^2}$$

Iar polarizaţia mediului datorată mişcării electronilor este:

$$P_e = -\frac{n\,e^2E}{m\omega^2}$$

Polarizaţia totală a mediului are expresia:

$$P = P_i + P_e = -\frac{n\,e^2}{m\omega^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)E$$

Dacă masa ionilor este mult mai mare decît masa electronilor, atunci polarizaţia totală a mediului este:

$$P = -\frac{n\,e^2}{m\omega^2}E$$

In acest caz, permitivitatea mediului are expresia:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{n\,e^2}{m\omega^2}E \qquad \text{deci } \varepsilon < \varepsilon_0$$

Densitatea curentului de conducţie este:

$$j = n\,e\,v = n\,e\,\frac{dx_1}{dt} = -\frac{n\,e^2}{m\omega^2}\,\frac{\partial E}{\partial t}$$

Introducem această expresie în următoarea ecuaţie a lui Maxwell:

Deci $\nabla \times \vec{B} =$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\varepsilon_0 - \frac{n\,e^2}{m\omega^2}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\,\varepsilon\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

7.13. Fie un condensator plan cu armături circulare de rază a la distanţa h una de cealaltă. Condensatorului i se aplică o tensiune alternativă de înaltă frecvenţă, astfel încît cîmpul electric în spaţiul dintre armături este uniform în orice moment şi variază sinusoidal în timp $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$.

a) Să se determine cîmpul magnetic indus $\vec{B}_1$ de cîmpul electric variabil $\vec{E}_1$.

b) Să se determine cîmpul electric indus $\vec{E}_2$ de cîmpul magnetic variabil $\vec{B}_1$.

c) Să se arate că cele două cîmpuri sînt date de relaţiile:

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left[1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 + \dots\right]$$

$$B = -\frac{i E_0 e^{i\omega t}}{c}\sum_n \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2n-1}$$

R.: a) Pentru determinarea cîmpului magnetic indus $\vec{B}_1$ utilizăm legea circuitului magnetic. Conturul Γ_1 pe care se integrează este un cerc de rază r situat într-un plan paralel cu armăturile, situat între ele:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1\, d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{S_{\Gamma_1}} \vec{E}_1\, d\vec{S} \qquad \text{sau}$$

$$2\pi r \cdot B_1 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} \cdot \pi r^2$$

Deci cîmpul magnetic indus B_1 de cîmpul electric variabil E_1 are expresia:

$$B_1(r) = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}$$

b) Pentru determinarea cîmpului electric indus $\vec{E}_2$ folosim legea inducţiei electromagnetice:

$$\text{rot}\, \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

Deoarece cîmpul magnetic $\vec{B}_1$ depinde de r rezultă conform legii inducţiei electromagnetice că şi cîmpul electric $\vec{E}_2$ depinde de r. Cîmpul electric rezultant $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ nu mai este

uniform, din cauza lui $\vec{E}_2$. Conturul Γ_2 pe care se integrează este un dreptunghi de lungime h şi grosime dr situat la distanţa r de axa ce trece prin centrele celor două armături. Deci:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}_2 \, d\vec{\ell} = - E_2 h \qquad dS = h \, dr$$

$$\int_{S_{\Gamma_2}} \vec{B}_1 \, d\vec{S} = h \int_0^a B_1(r) dr = \frac{i\omega E_0}{2c^2} e^{i\omega t} \int_0^r r \, h \, dr =$$

$$= \frac{i\omega h \, r^2}{4 c^2} E_0 \, e^{i\omega t}$$

Din legea inducţiei electromagnetice:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}_2 d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma_2}} \vec{B}_1 \, d\vec{S}$$

rezultă pentru cîmpul electric indus $\vec{E}_2$ expresia:

$$E_2(r) = - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 \, e^{i\omega t}$$

c) Cîmpul magnetic indus $\vec{B}_2(r)$ de cîmpul electric variabil $\vec{E}_2(r)$ se determină din următoarea ecuaţie a lui Maxwell scrisă sub formă de integrală:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_2 \, d\vec{\ell} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{E}_2 \, d\vec{S}$$

Dar $dS = 2\pi r \, dr$, deci

$$\int_{S_{\Gamma_1}} \vec{E}_2 \, d\vec{S} = - \frac{\omega^2 E_0}{4 c^2} e^{i\omega t} \int_0^a r^2 \cdot 2\pi r \, dr =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{\omega^2 E_0}{4c^2} e^{i\omega t} \cdot \frac{r^4}{4}$$

$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_2 \, d\vec{\ell} = B_2 \cdot 2\pi r$, deci cîmpul magnetic indus $\vec{B}_2$ are expresia:

$$B_2(r) = - \frac{i\omega^3 r^3}{16 c^4} E_0 \, e^{i\omega t}$$

Cîmpul electric indus $\vec{E}_3(r)$ de cîmpul magnetic variabil $\vec{B}_2(r)$ se determină din următoarea ecuaţie a lui Maxwell scrisă sub formă integrală:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}_3 \, d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma_2}} \vec{B}_2 \, d\vec{S}$$

Deci

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a B_2(r) \, dr = \frac{\omega^4 r^4}{64\, c^4} E_o \, e^{i\omega t}$$

Se observă că între $E_{n+1}(r)$ şi $B_n(r)$ există relaţia:

$$E_{n+1}(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_n(r) \, dr \qquad n = 1,2,\ldots$$

deci

$$B_n(r) = \frac{\partial}{\partial r} \int E_{n+1}(r) dt = - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} E_{n+1}(r)$$

Intre $E_n(r)$ şi $B_n(r)$ există relaţia:

$$B_n(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a E_n(r) \, r \, dr$$

Din aproape în aproape se pot astfel calcula cîmpurile electrice induse $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, $\vec{E}_4 \ldots$, precum şi cîmpurile magnetice induse $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, $\vec{B}_4 \ldots$ Astfel cîmpul electric rezultant are expresia $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots = \vec{E}_o e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 + \ldots \right]$, iar cîmpul magnetic rezultant are expresia: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots = - \frac{i}{c} \vec{E}_o e^{i\omega t} \left[- \frac{1}{1!0!} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^1 + \frac{1}{2!1!} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^3 - \ldots \right]$

7.14. Fie un ghid de undă rectangular în care se propagă o undă electromagnetică sinusoidală astfel încît intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ este paralelă cu axa Oz avînd expresia $E_z = E_o \cos \frac{\pi y}{a} \exp\left[i(k_g x - \omega t) \right]$.

a) Pornind de la ecuaţia de propagare a undei electromagnetice să se deducă expresia vitezei de fază v.

b) Ce relaţie există între k_g şi $k = \frac{\omega}{c}$? Să se găsească

expresia vitezei de grup $u_g = \frac{d\omega}{dk_g}$.

c) Care este expresia inducţiei magnetice, dar a vectorului Poynting?

R.: a) In cazul nostru ecuaţia de propagare a undei electromagnetice este:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Dar

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k_g^2 E_z = -\frac{\omega^2}{v^2} E_z \ ; \ \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} E_z$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 E_z$$

Introducînd aceste expresii în ecuaţia (1) obţinem

$$v = c\left(1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}\right)^{-1/2}$$

b) Prin definiţie $k_g = \frac{\omega}{v}$ deci $k_g = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$

Viteza de grup este

$$u_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{dk}{dk_g} = c \cdot \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \frac{\pi^2}{a^2}}} = c\,\frac{k_g}{k}$$

Dar $\omega = k_g v = k\,c$ sau $\frac{k_g}{k} = \frac{c}{v}$

Deci $u_g\, v = c^2$

c) Cîmpul magnetic se determină cu ajutorul ecuaţiei lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cîmpul electric fiind sinusoidal rezultă că şi cîmpul magnetic este sinusoidal, deci

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -i\omega B$$

Inducţia magnetică se poate deci afla din relaţia

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{i}{\omega}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{j}\right)$$

deci

$$B_x = \frac{i}{\omega}\cdot\frac{\pi}{a}E_o \sin\frac{\pi y}{a}\exp\left[i(k_g x - \omega t)\right] \quad \text{la sfert cu } E_z$$

$$B_y = -\frac{1}{v}E_o \cos\frac{\pi y}{a}\exp\left[i(k_g x - \omega t)\right] \quad \text{în fază cu } E_z$$

Vectorul Poynting este:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_o}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & E_z \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_o}(E_z B_x\vec{j} - E_z B_y\vec{i})$$

$$S_x = \frac{1}{v\mu_o}E_o^2\cos^2\frac{\pi y}{a}\,e^{2i(k_g x - \omega t)}$$

$$S_y = i\,\frac{\pi}{2a\,\omega\mu_o}E_o^2\sin\frac{2\pi y}{a}\,e^{2i(k_g x - \omega t)}$$

Valorile medii ale celor două componente ale vectorului Poynting sînt:

$$\overline{S}_x = \frac{1}{2v\mu_o}E_o^2 \qquad \overline{S}_y = 0$$

Densitatea de energie electrostatică este $w_e = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}$,

deci

$$\overline{S}_x = \frac{c^2}{v}w_e = u_g\,w_e$$

Rezultă că energia se propagă de-a lungul axei Ox cu viteza u_g. Deoarece $S_y = 0$ rezultă că acest flux de energie se reflectă de o față și de alta a ghidului.

7.15. Să se determine densitatea curentului $\vec{j}$ dacă cîmpul magnetic creat de acest curent are forma:

a) $\vec{B} = B_r\vec{1}_r + B_\theta\vec{1}_\theta + B_\varphi\vec{1}_\varphi$

unde B_r, B_θ și B_φ sînt componentele vectorului $\vec{B}$ în coordonate

sferice şi au expresiile :

$$B_r = a\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\theta \qquad B_\theta = a\left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\sin\theta \qquad B_\varphi = 0$$

pentru $r \leq R$

$$B_r = \frac{2aR^5}{15r^3}\cos\theta \qquad B_\theta = \frac{a\,R^5}{15r^3}\sin\theta \qquad B_\varphi = 0 \quad \text{pentru } r \geq R$$

b) $\vec{B} = B_r\,\vec{1}_r + B_\varphi\,\vec{1}_\varphi + B_z\,\vec{1}_z$, unde B_r, B_φ, B_z sînt componentele vectorului $\vec{B}$ în coordonate cilindrice

$$B_r = 0 \qquad B_\varphi = g\,r \qquad B_z = b(R^2 - r^2) \quad \text{pentru } r \leq R$$

$$B_r = B_z = 0 \qquad B_\varphi = \frac{gR^2}{r} \qquad \text{pentru } r \geq R$$

R.: Densitatea de curent $\vec{j}$ ce creează un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ se determină din ecuaţia lui Maxwell:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

a) Expresia rotorului în coordonate sferice este:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, B_\varphi) - \frac{\partial B_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{1}_r + $$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial B_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\varphi)\right]\vec{1}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]\vec{1}_\varphi$$

Deci pentru $r \leq R$:

$$j_r = j_\theta = 0 \qquad j_\varphi = \frac{a\sin\theta}{r\,\mu_0}\left(\frac{6}{5}r^2 - \frac{R^2}{3} + \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right) =$$

$$= \frac{a\,r\sin\theta}{\mu_0} \qquad \text{pentru } r \geq R$$

$$j_r = j_\theta = 0 \qquad j_\varphi = \frac{a\,R^5\sin\theta}{15\,r\,\mu_0}\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3}\right) = 0$$

b) Expresia rotorului în coordonate cilindrice este:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\vec{1}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{1}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial (rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right)\vec{1}_z$$

Deci pentru $r \leq R$

$$j_r = 0 \qquad j_\varphi = \frac{2\,b\,r}{\mu_0} \qquad j_z = \frac{1}{\mu_0}\,(2\,g - 0) = \frac{2\,g}{\mu_0}$$

pentru $r \geq R$

$$j_r = j_\varphi = j_z = 0$$

7.16. Să se determine densitatea de curent $\vec{j}$ dacă cîmpul magnetic creat de această densitate de curent are forma:

a) $\vec{H} = f(r)\ (\vec{a} \times \vec{r})$

b) $\vec{H} = (\vec{a}\,\vec{r})\ (\vec{b} \times \vec{r})$

unde vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt vectori paraleli şi independenţi de coordonate şi timp, iar $f(r)$ este o funcţie derivabilă arbitrară.

R.: Densitatea de curent se determină din ecuaţia lui Maxwell:

$$\vec{j} = \text{rot}\,\vec{H}$$

a) Folosim relaţia:

$$\text{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\text{rot}\,\vec{A} + \text{grad}\,\varphi \times \vec{A}$$

Deci $\vec{j} = \text{rot}\,\vec{H} = \text{rot}(f(r)\ (\vec{a} \times \vec{r})) = f(r)\ \text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) +$

$$+ \text{grad}\,f(r) \times (\vec{a} \times \vec{r})$$

Dar $\text{grad}\,f(r) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\text{grad}\,r = \dfrac{\partial f}{\partial r} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{a}\,(\vec{r}\,\vec{r}) - \vec{r}(\vec{a}\,\vec{r}) = r^2\vec{a} - \vec{r}\,(\vec{a}\,\vec{r})$$

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = (\vec{r}\,\text{grad})\vec{a} - (\vec{a}\,\text{grad})\vec{r} - \vec{r}\,\text{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\text{div}\,\vec{r} =$$

$$= 0 - \vec{a} - 0 + 3\,\vec{a} = 2\,\vec{a}$$

Rezultă că $\vec{j} = 2\,f(r)\,\vec{a} + \dfrac{\partial f}{\partial r} \cdot \left[r\,\vec{a} - \dfrac{\vec{r}(\vec{a}\,\vec{r})}{r} \right] =$

$$= \left[2f(r) + r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right]\vec{a} - \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{(\vec{a}\,\vec{r})}{r} \cdot \vec{r}$$

b) Densitatea de curent $\vec{j}$ are expresia:

$$\vec{j} = \text{rot}((\vec{a}\,\vec{r})(\vec{b} \times \vec{r})) = (\vec{a}\,\vec{r})\ \text{rot}(\vec{b} \times \vec{r}) + \text{grad}(\vec{a}\,\vec{r}) \times (\vec{b} \times \vec{r})$$

Dar

$$\text{rot}(\vec{b} \times \vec{r}) = (\vec{r}\,\text{grad})\vec{b} - (\vec{b}\,\text{grad})\vec{r} - \vec{r}\,\text{div}\,\vec{b} + \vec{b}\,\text{div}\,\vec{r} = 2\,\vec{b}$$

$$\text{grad}(\vec{a}\,\vec{r}) = (\vec{a}\,\text{grad})\vec{r} + (\vec{r}\,\text{grad})\,\vec{a} + \vec{a} \times \text{rot}\,\vec{r} + \vec{r} \times \text{rot}\,\vec{a} = \vec{a} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{a}$$

Deci $\vec{j}$ are expresia

$$\vec{j} = 2\,\vec{b}(\vec{a}\,\vec{r}) + \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) = 2\,\vec{b}(\vec{a}\,\vec{r}) + \vec{b}(\vec{a}\,\vec{r}) - \vec{r}(\vec{a}\,\vec{b}) = 3\,\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{a}\,\vec{b})$$

7.17. In spaţiul liber, componentele vectorului intensitatea cîmpului magnetic, în coordonate cilindrice, sînt $H_r = H_\varphi = 0$ şi $H_z = H(r,t)$. Funcţia $H(r,t)$ şi derivatele sale sînt nule în origine. Determinaţi intensitatea E a cîmpului electric indus de acest cîmp magnetic.

R.: Vectorul intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electric indus este perpendicular pe vectorul intensitatea cîmpului magnetic $\vec{H}$, iar liniile de cîmp sînt circulare, vectorul $\vec{E}$ fiind tangent la liniile de cîmp. Rezultă că:

$$E_r = E_z = 0 \qquad E_\varphi = E(r,t) \qquad (1)$$

Cîmpul electric indus de cîmpul magnetic de intensitate $\vec{H}(H_r, H_\varphi, H_z)$ se determină cu ajutorul ecuaţiei lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

Deoarece intensitatea cîmpului magnetic este exprimată în coordonate cilindrice rezultă că vom folosi expresia rotorului în coordonate cilindrice:

$$\text{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{1}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{1}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,\vec{A}_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{1}_z \qquad (3)$$

Ţinînd cont de relaţiile (1) şi (3) rezultă că ecuaţia (2) devine:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,E) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (4)$$

Integrînd ecuaţia (4) şi ţinînd cont că pentru $r = 0$ funcţia $E(r,t)$ se anulează, obţinem:

$$E(r,t) = -\frac{\mu_0}{r}\int_0^r \rho \frac{\partial H(\rho,t)}{\partial t} d\rho$$

7.18. Fie un mediu de permitivitate ε , permeabilitate μ şi conductivitate σ . a) Să se exprime densitatea de putere disipată prin efect Joule în funcţie de σ şi $\vec{E}$; b) Să se arate că pentru un mediu conductor ideal, intensitatea cîmpului electric se anulează în toate punctele din mediu; c) Să se arate, de asemenea, că în regim sinusoidal, într-un mediu conductor ideal, se anulează următoarele mărimi fizice $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, ρ (densitatea de sarcină electrică) şi $\vec{j}$(densitatea de curent).

R.: a) Puterea disipată prin efect Joule este:

$$P = R I^2 = \rho \frac{l}{S} j^2 S^2 = \rho l j^2 S = \rho j^2 V$$

Densitatea de putere disipată prin efect Joule este deci:

$$p = \frac{P}{V} = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

Dar conform formei locale a legii lui Ohm $j = \sigma E$ rezultă că puterea disipată prin efect Joule, în unitatea de volum este:

$$p = \sigma E^2$$

b) Conductibilitatea mediului conductor ideal este:

$$\sigma = \frac{p}{E^2} \to \infty$$

Dar densitatea de putere disipată prin efect Joule în mediul conductor este finită. Rezultă deci că intensitatea cîmpului electric este nulă în orice punct din mediul conductor ideal.

c) Deoarece $\vec{E} = 0$, din relaţia $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ rezultă $\vec{D} = 0$.

In regim sinusoidal inducţia cîmpului magnetic are forma:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t} \qquad \text{deci} \qquad \dot{\vec{B}} = i\omega \vec{B}$$

Ecuaţia lui Maxwell rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, în regim sinusoidal are deci forma rot $\vec{E} = -i\omega \vec{B}$. Din această relaţie rezultă că atunci cînd $\vec{E}$ este nul şi $\vec{B}$ este nul. Din relaţia $\vec{B} = \mu \vec{H}$ rezultă că

şi $\vec{H}$ este nul. Din ecuaţia lui Maxwell $\text{rot}\,\vec{B} = \mu\,\vec{j} + \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ rezultă că şi $\vec{j}$ este nul. Din teorema lui Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ rezultă că şi densitatea de sarcină electrică ρ este zero.

7.19. Fie S suprafaţa de separaţie dintre un material conductor ideal şi vid. Să se exprime componentele normale şi tangenţiale la suprafaţa S ale vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ în funcţie de densitatea superficială de sarcină Σ şi de densitatea de curent $\vec{j}$.

R.: Conform legii lui Gauss pentru cîmpul electric componentele normale ale lui $\vec{E}$ sînt discontinuui:

$$E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0}$$

In mediul conductor ideal $E_{n_1} = 0$. Deci componenta normală la suprafaţa S a intensităţii cîmpului electric în vid este

$$E_n = \frac{\Sigma}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Componentele tangenţiale ale lui $\vec{E}$ la suprafaţa de separare se conservă:

$$E_{t_2} = E_{t_1}$$

Dar în mediul conductor ideal $E_{t_1} = 0$. Deci componenta tangenţială la suprafeţa S, a intensităţii cîmpului electric în vid este

$$E_t = 0 \qquad (2)$$

Componentele normale ale lui $\vec{B}$ la suprafaţa de separaţie conductor - vid se conservă:

$$B_{n_2} = B_{n_1}$$

In regim sinusoidal, cîmpul magnetic în materialul conductor ideal este nul, deci

$$B_n = 0 \qquad (3)$$

Componentele tangenţiale ale lui $\vec{B}$ la suprafaţa de se-

paraţie sînt discontinuu:

$$B_{2_t} - B_{1_t} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{j} \times \vec{n})$$

Deci

$$B_t = \frac{1}{\mu_0}(\vec{j} \times \vec{n}) \quad (4)$$

7.20. Intr-un material conductor ideal se realizează o cavitate de forma unui paralelipiped dreptunghic. Originea sistemului se alege într-unul din vîrfurile paralelipipedului, astfel încît, muchiile acestuia sînt OA = a, OB = b, OD = d. Cîmpul electric în interiorul cavităţii are forma:

$$E_x = E_1\cos(k_1x+\varphi_1)\sin(k_2y+\varphi_2)\sin(k_3z+\varphi_3)e^{i\omega t}$$

$$E_y = E_2\sin(k_1x+\varphi_1)\cos(k_2y+\varphi_2)\sin(k_3z+\varphi_3)e^{i\omega t}$$

$$E_z = E_3\sin(k_1x+\varphi_1)\sin(k_2y+\varphi_2)\cos(k_3z+\varphi_3)e^{i\omega t}$$

E_i, φ_i, k_i şi ω fiind constante $i = \overline{1,3}$.

a) Arătaţi că componentele tangenţiale ale intensităţii cîmpului electric sînt continuui pentru anumite valori particulare ale lui k_i şi φ_i, $i = \overline{1,3}$.

b) Să se deducă expresia frecvenţei de rezonanţă a cavităţii.

R.: a) Condiţia $E_t = 0$ (vezi problema 7.20) este echivalentă cu condiţiile:

$E_x(x, 0, 0) = 0$ (1) $\qquad E_x(x, b, d) = 0$ (2)

$E_y(0, y, 0) = 0$ (3) $\qquad E_y(a, y, d) = 0$ (4)

$E_z(0, 0, z) = 0$ (5) $\qquad E_z(a, b, z) = 0$ (6)

Din (1) rezultă $E_1\cos(k_1x+\varphi_1)\sin\varphi_2\sin\varphi_3 e^{i\omega t} = 0$

deci $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Din (2) rezultă $E_1\cos(k_1x+\varphi_1)\sin k_2b \sin k_3d\, e^{i\omega t} = 0$

deci $k_2 = \frac{\pi p}{b}$

$k_3 = \frac{\pi q}{d}$ unde p şi q sînt numere întregi

Din (3) rezultă $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$.

Din (4) rezultă $k_1 = \frac{\pi n}{a}$, unde n este un număr întreg.

Deci componentele tangențiale ale lui $\vec{E}$ sînt continuui pe fețele cavității dacă $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, iar $k_1 = \frac{\pi n}{a}$,

$$k_2 = \frac{\pi p}{b}, \quad k_3 = \frac{\pi q}{d} \qquad (7)$$

b) Ecuația de propagare a undei electrice în cavitate este conform ecuațiilor lui Maxwell:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Deci

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Dar

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_x$$

Rezultă următoarea relație

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad (8)$$

Introducînd relațiile (7) în (8) rezultă pentru frecvența de rezonanță a cavității expresia:

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{d^2}}$$

7.21. Fie o cavitate cubică de latură L realizată într-un material conductor ideal ($\sigma \to \infty$). Să se determine numărul de moduri de oscilație cu frecvența cuprinsă în intervalul ν, $\nu + d\nu$.

R.: O undă staționară de frecvență ν și vector de undă $\vec{k}$ ($k_1 = n\frac{\pi}{L}$, $k_2 = p\frac{\pi}{L}$, $k_3 = q\frac{\pi}{L}$) este o suprapunere de 8 unde progresive de aceeași frecvență pentru care proiecțiile vectorului de undă sînt:

1	$+k_1$	$+k_2$	$+k_3$	5	$-k_1$	$-k_2$	$+k_3$
2	$-k_1$	$+k_2$	$+k_3$	6	$+k_1$	$-k_2$	$-k_3$
3	$+k_1$	$-k_2$	$+k_3$	7	$-k_1$	$+k_2$	$-k_3$
4	$+k_1$	$+k_2$	$-k_3$	8	$-k_1$	$-k_2$	$-k_3$

Vectorii de undă sînt opuşi doi cîte doi, iar vîrfurile lor, în spaţiul k, sînt pe o sferă de rază ω/c. In spaţiul k, fiecărei unde staţionare (k dat) îi corespunde în ootantul cu k_1, k_2, k_3 pozitivi un punct de coordonate

$$k_1 = \frac{n\pi}{L}, \quad k_2 = \frac{p\pi}{L}, \quad k_3 = \frac{q\pi}{L}$$

unde n, p, q sînt numere întregi pozitive astfel încît

$$n^2 + p^2 + q^2 = \frac{k^2L^2}{\pi^2}$$

Densitatea acestor puncte, în spaţiul k, este $\frac{L^3}{\pi^3} = \frac{V}{\pi^3}$, deoarece volumul cubului cu vîrfurile în punctele vecine este $(\frac{\pi}{L})^3$.

Volumul primului octant, în spaţiul k, este:

$$\frac{1}{8}\ \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 = \frac{4\pi^4\nu^3}{3c^3}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Deci numărul de frecvenţe proprii inferioare frecvenţei ν este:

$$N = \frac{V}{\pi^3}\cdot\frac{4\pi^4\nu^3}{3c^3} = \frac{4\pi V\nu^3}{3c^3}$$

Astfel numărul de moduri de oscilaţie cu frecvenţa cuprinsă în intervalul ν, $\nu + d\nu$ este:

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

7.22. Intr-un supraconductor legea lui Ohm este înlocuită cu relaţia: $\text{rot}\,\Lambda\vec{j} = -\vec{B}$, unde $\Lambda = \frac{m}{ne^2}$ (n = densitatea de electroni). Cu ajutorul ecuaţiilor lui Maxwell să se determine

ecuaţia diferenţială pe care o satisface $\vec{B}$.

R.: Fie ecuaţia lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Aplicăm operatorul rotor acestei relaţii:

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{B}) = \mu_0 \text{rot}\,\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\vec{E})$$

dar

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{B}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(ecuaţia lui Maxwell)}$$

$$\text{rot}\,\vec{j} = -\frac{1}{\Lambda}\vec{B}$$

Deci

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Dacă cîmpul magnetic nu depinde decît de coordonate, atunci

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B}$$

Dacă considerăm cazul supraconductorului care umple semispaţiul $x \geqslant 0$, ecuaţia diferenţială (1) devine:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{\Lambda} B$$

Ea admite soluţia $B = B_0 \exp(-\frac{x}{\lambda})$, unde $\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}}$.

7.23. La frecvenţe mari densitatea curentului total din supraconductor este de forma:

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s$$

j_n este componenta normală a densităţii de curent (datorată electronilor normali) $\vec{j}_n = \sigma \vec{E}$

j_s este componenta supraconductoare a densităţii de curent (datorată superelectronilor), $\text{rot}\,\vec{j}_s = -\frac{\vec{B}}{\Lambda}$.

Utilizînd ecuaţiile Maxwell să se scrie ecuaţia diferenţială pe care o satisface $\vec{B}$. Să se găsească relaţia între

k^2 şi ω dacă soluţia ecuaţiei diferenţiale este de forma

$$\vec{B} = \vec{B}_o \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Se dau $\sigma = 10^{10}\Omega^{-1}m$, $\Lambda = 10^{-21}$ kg.m^{3}C^{-2}, $\omega = 10^{13}$ Hz.

R.: Fie ecuaţia lui Maxwell

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Aplicăm operatorul rotor acestei relaţii:

$$\text{grad}(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_o \sigma\, \text{rot}\,\vec{E} - \frac{\mu_o}{\Lambda}\vec{B} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\vec{E}$$

Obţinem în final:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_o}{\Lambda}\vec{B} + \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Dacă soluţia este de forma

$$\vec{B} = \vec{B}_o \exp i(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \qquad (2)$$

Prin introducerea relaţiei (2) în (1) obţinem:

$$k^2 = -\frac{\mu_o}{\Lambda} + i\omega\mu_o\sigma + \frac{\omega^2}{c^2}$$

Astfel: contribuţia datorată curenţilor de deplasare este $\frac{\omega^2}{c^2} \simeq 10^9$, contribuţia datorată supracurentului este $\frac{\mu_o}{\Lambda} \simeq 10^{15}$, iar contribuţia datorată efectului de suprafaţă $\sigma\mu_o\omega \simeq 10^{17}$. Se observă că efectul de suprafaţă predomină, deci

$$k^2 \simeq \sigma\mu_o\omega$$

7.24. Intr-un mediu de permitivitate ε_o şi permeabilitate μ_o sînt n electroni în unitatea de volum. Se aplică sistemului un cîmp electric $\vec{E}$ sinusoidal de pulsaţie ω şi un cîmp magnetic uniform $\vec{B}_o$. Asupra electronilor în mişcare acţionează din partea mediului o forţă rezistentă proporţională cu viteza $-m\frac{\vec{v}}{\tau}$. Densitatea de curent verifică relaţia:

$$\frac{m}{e}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = n e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}_o - \frac{m}{e\tau}\vec{j}$$

Presupunînd că $\vec{B}_o$ este paralel cu axa Oz, că vîrful

vectorului $\vec{E}$ oscilează într-un plan perpendicular pe Oz, că $\tau \simeq 10^{10}$ s, să se arate că $j = \sigma E$, unde σ are expresia

$$\sigma = \frac{k}{\frac{1}{\tau} + i(\omega - \omega_0)} \quad (k \text{ şi } \omega_0 \text{ fiind constante})$$

R.: Deoarece $\vec{B}_0 \parallel Oz$, iar $\vec{E} \perp Oz$, componenta j_z verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial j_z}{\partial t} + \frac{1}{\tau} j_z = 0 \quad \text{deci} \quad j_z = j_z(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

τ fiind de ordinul 10^{10} s rezultă că j_z scade foarte repede, deci practic aproape instantaneu $\vec{j}$ este perpendicular pe Oz. Astfel $\vec{j} \times \vec{B}_0 = j_y B_0 \vec{i} - j_x B_0 \vec{j}$.

Deci

$$\frac{m}{e} \frac{\partial j_x}{\partial t} = n\, e\, E_x + j_y B_0 - \frac{m}{e} \frac{j_x}{\tau}$$

$$\frac{m}{e} \frac{\partial j_y}{\partial t} = n\, e\, E_y - j_x B_0 - \frac{m}{e} \frac{j_y}{\tau}$$

Se înmulţeşte relaţia a doua cu $i(i^2 = -1)$ şi se adună apoi cu prima. Se ţine cont că $j = j_x + i\, j_y$, $E = E_x + i\, E_y$, $ij = -j_y + i\, j_x$.

Se obţine:

$$\frac{m}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = n\, e\, E - i\, B_0 j - \frac{m}{e} \frac{j}{\tau}$$

sau

$$\frac{m}{e} \frac{\partial j}{\partial t} + \left(\frac{m}{e\tau} + i\, B_0\right) j = n\, e\, E$$

Deoarece $E = E_0 e^{i\omega t}$ rezultă că soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene este de forma $j = j_0 e^{i\omega t}$. Punînd condiţia ca această soluţie să verifice ecuaţia rezultă:

$$j = \frac{\frac{ne^2}{m}}{\frac{1}{\tau} + i\left(\omega + \frac{eB_0}{m}\right)} E \quad \text{deci} \quad \sigma = \frac{\frac{ne^2}{m}}{\frac{1}{\tau} + i\left(\omega + \frac{eB_0}{m}\right)}$$

Constantele k şi ω_0 au valorile: $k = \frac{ne^2}{m}$, $\omega_0 = -\frac{eB_0}{m}$

7.25. Fie două plăci metalice plane, paralele, aşezate în vid la distanţa a una de cealaltă. O placă se consideră în planul xOy. Aceste plăci sînt presupuse infinite, de permeabilitate μ_0 şi conductivitate $\sigma \to \infty$. Intre plăci, potenţialele electromagnetice au expresia:

$$A_x = \mathrm{Re}\left\{\left[\exp i(k_z z - \omega t)\right] \quad f(y)\right\}.$$

$$A_y = 0$$

$$A_z = 0 \quad \text{şi} \quad V = 0$$

Arătaţi că problema are soluţii nenule pentru valori discrete $k_z^{(n)}$ ale lui k_z ce corespund funcţiilor $f^{(n)}(y)$.

R.: Intre plăci $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$ deci potenţialele electromagnetice satisfac următoarele ecuaţii:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{şi} \quad \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Avînd în vedere expresiile potenţialelor, obţinem următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\ddot{f}(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) f(y) = 0 \qquad (1)$$

Notăm

$$k_o^2 = \omega^2/c^2 - k_z^2$$

Soluţia ecuaţiei (1) este:

$$f(y) = A\, e^{ik_o y} + B\, e^{-ik_o y}$$

Intensitatea cîmpului electric ($\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ - grad V) are expresia

$$E_x = \mathrm{Re}\left[i\omega f(y) \exp i(k_z z - \omega t)\right]$$

Componenta longitudinală a intensităţii cîmpului electric este continuă şi este egală cu zero, deci $f(0) = 0$ şi $f(a) = 0$

$$A + B = 0$$

$$A\, e^{ik_o a} + B\, e^{-ik_o a} = 0 \quad \text{rezultă că} \quad 2i\, A \sin k_o a = 0$$

Ca soluţia să fie nebanală trebuie ca $\sin k_o a = 0$ sau $k_o a = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Deci numărul de undă k_z ia valori discrete

$$k_z^{(n)} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{1/2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

iar funcţia $f^{(n)}(y)$ are expresia:

$$f^{(n)}(y) = A_0 \sin \frac{n\pi}{a} y$$

7.26. Să se determine cîmpul electric, cîmpul magnetic, precum şi densitatea de curent între plăcile metalice din problema 7.25.

R.: Avînd în vedere că $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$ rezultă că componentele lui $\vec{E}$ sînt:

$$E_x = \omega A_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin(k_z^{(n)} z - \omega t)$$

$$E_y = E_z = 0 .$$

Cîmpul magnetic se determină cu relaţia $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{k}$$

$$B_x = 0 \quad B_y = -k_z^{(n)} A_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin(k_z^{(n)} z - \omega t)$$

$$B_z = -\frac{n\pi}{a} A_0 \cos(k_z^{(n)} z - \omega t) \cos \frac{n\pi}{a} y$$

Componenta tangenţială a inducţiei magnetice este discontinuă la suprafaţa de separaţie placă - vid.

$$B_{t_2} - B_{t_1} = \frac{1}{\mu_0} \vec{j} \times \vec{n}$$

Pentru placa 1

$$B_{t_1} = 0$$

$$B_{t_2} = B_z(y = 0) = -\frac{n\pi}{a} A_0 \cos(k_z^{(n)} z - \omega t)$$

Deci

$$j_x = -\frac{n\pi}{a\mu_0} A_0 \cos(k_z^{(n)} z - \omega t)$$

$$j_y = j_z = 0$$

Pentru placa 2 :

$$B_{t_2} = 0$$

$$B_{t_1} = B_z(y = a) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n\pi}{a} A_0 \cos(k_z^{(n)} z - \omega t)$$

Deci

$$j_x = \frac{n\pi}{a\mu_0} (-1)^{n+1} A_0 \cos(k_z^{(n)} z - \omega t).$$

$$j_y = j_z = 0$$

7.27. Fie două plăci metalice plane, paralele, aşezate în vid la distanţa a una de cealaltă. Una din plăci este chiar în planul xOz. Plăcile metalice au permeabilitatea μ_0 şi conductivitatea σ. Intre plăci potenţialele electromagnetice au expresia:

$$A_x = \left[\exp i(k_z z - \omega t)\right] f(y)$$

$$A_y = A_z = 0$$

$$V = 0$$

Să se determine ecuaţia diferenţială pe care o satisface f(y) şi următoarele cazuri: a) pe prima placă $f_1(y)$; b) în spaţiul dintre plăci $f_0(y)$ şi c) pe cea de-a doua placă $f_2(y)$.

R.: a) Ecuaţia diferenţială pe care o satisface componenta A_x a potenţialului vector este:

$$\Delta A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 j_x$$

Densitatea de curent se determină din forma locală a legii lui Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } V\right)$$

Tinînd cont de expresiile potenţialelor rezultă că

$$j_x = i\sigma\omega A_x$$

$$j_y = j_z = 0$$

Dar:

$$\Delta A_x = -k_z^2 f_1(y)\, e^{i(k_z z - \omega t)} + \ddot{f}_1(y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\omega^2 f_1(y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Deci $f_1(y)$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\ddot{f}_1(y) - (k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\sigma\mu_o\omega)f_1(y) = 0$$

Notînd $k_1^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\sigma\mu_o\omega$ obţinem

$$\ddot{f}_1(y) - k_1^2 f_1(y) = 0$$

b) Intre plăci densitatea de curent este nulă. Componenta A_x a potenţialului vector satisface ecuaţia:

$$\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0$$

Conform cu problema 7.26 ecuaţia diferenţială căutată este:

$$\ddot{f}_o(y) - k_o^2 f_o(y) = 0 \quad \text{cu} \quad k_o^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$$

c) Acest caz coincide cu cel de la punctul a), deci:

$$\ddot{f}_2(y) - k_1^2 f_2(y) = 0$$





BIBLIOGRAFIE

1. I.Barbur, D.Strugaru - Culegere de probleme de electricitate şi magnetism, Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.
2. N.Gherbonovschi, N.Marinescu, D.Gheorghiu - Probleme de electromagnetism şi electrotehnică, Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
3. M.Preda, P.Cristea, F.Manea ş.a. - Bazele electrotehnicii. Probleme, Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
4. A.Fouillé - Problèmes d'électrotechnique. Electricité Fondamentale, Dunod, Paris, 1971.
5. U.G.Chambers - An Introduction to the Mathematics of Electricity and Magnetism, Chapman and Hall, London, 1973.
6. L.Müller, I.Petre ş.a. - Culegere de probleme de fizică, I.P.B., 1985.
7. V.Novacu - Culegere de probleme de electrodinamică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.
8. A.Alexéev - Recueil de problèmes d'électrodynamique Classique, MIR, Moscova, 1980.
9. R.Sfichi - Probleme de limită şi extrem în fizică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1990.
10. C.Corega, M.Todică ş.a. - Probleme de fizică, Ed.Facla, Timişoara, 1990.
11. M.Preda, P.Cristea - Probleme de electricitate, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1973.
12. G.Cone, G.Stanciu - Probleme de fizică, Ed.Academiei, Bucureşti, 1988.
13. N.Hulin - Jung - Relativité - Ondes électromagnétiques, Travaux dirigés, Collection Méthodes - Hermann Paris - 1968.
14. A.Brelot, N.Hulin-Jung, J.Klein, S.Saltiel - Électricité - Magnétisme - Travaux dirigés - Hermann Paris, 1971.
15. E.Purcell - Electricitate şi magnetism. (Cursul de fizică Berkeley, vol.II), Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
16. R.Feynman - Fizica modernă. Electromagnetismul. Structura materiei, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1970.

Bun de tipar August 1991 Apărut Oct. 1991
Tiraj 177 ex. Coli tipar (fasc.) 17

Tipar executat sub Cda nr. 265/1991
Tipografia Universităţii Bucureşti

Lei 110,40